

# Az élettartam-kockázat modellezése



VÉKÁS PÉTER



Dr. Vékás Péter

# AZ ÉLETTARTAM-KOCKÁZAT MODELLEZÉSE



**Dr. Vékás Péter**

# **Az élettartam-kockázat modellezése**

Budapest, 2019

Dr. Vékás PÉTER

ISBN 978-963-503-768-1

A Budapesti Corvinus Egyetem és a Magyar Nemzeti Bank együttműködési  
megállapodása keretében támogatott mű



Kiadó:  
Budapesti Corvinus Egyetem  
1093 Budapest, Fővám tér 8.

Nyomdai kivitelezés: Komáromi Nyomda

# Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke	9
Táblázatok jegyzéke	12
Köszönetnyilvánítás	13
<b>1. Bevezetés</b>	<b>15</b>
1.1. Az élettartam-kockázat problémája . . . . .	15
1.2. Élettartam-kockázat a Szolvencia II keretrendszerben . .	18
1.3. Felépítés . . . . .	21
<b>I. A halandósági modellezés szakirodalmi háttere és keresztmetszeti módszertana</b>	<b>24</b>
<b>2. Szakirodalmi áttekintés</b>	<b>26</b>
2.1. Nemzetközi szakirodalom . . . . .	26
2.1.1. A halandósági modellezés kialakulása . . . . .	27
2.1.2. A Lee–Carter modell . . . . .	28
2.1.3. A Lee–Carter modell bírálata és kiterjesztései . .	30
2.1.4. Újabb halandóság-előrejelző módszerek . . . . .	34
2.1.5. Többdimenziós halandóság-előrejelzés . . . . .	36
2.1.6. Az élettartam-kockázat pénzügyi hatásai . . . . .	39

2.2.	Hazai kutatások és alkalmazások . . . . .	40
<b>3.</b>	<b>A halandósági modellezés módszertani alapjai</b>	<b>44</b>
3.1.	A halandóság statisztikai mérőszámai . . . . .	44
3.2.	A halandóság matematikai modellezése . . . . .	48
3.2.1.	A folytonos modell és a halálozási intenzitás . . .	50
3.2.2.	A diszkrét modell és a halandósági tábla . . . . .	52
3.2.3.	A folytonos és a diszkrét modell kapcsolata . . . .	55
3.3.	A halandósági tábla becslése . . . . .	58
3.3.1.	Becslés diszkrét modellkeretben . . . . .	58
3.3.2.	Becslés folytonos modellkeretben . . . . .	59
3.3.3.	A születésnapok és a naptári év kezdete közötti eltérés korrekciója . . . . .	60
3.3.4.	Kiegyenlítő eljárások . . . . .	61
3.3.5.	Az illeszkedés vizsgálata . . . . .	63
<b>II.</b>	<b>A Lee–Carter modell és alkalmazása</b>	<b>67</b>
<b>4.</b>	<b>A Lee–Carter modell elmélete</b>	<b>69</b>
4.1.	A modell felírása . . . . .	69
4.2.	Interpretáció . . . . .	71
4.3.	A paraméterek becslése . . . . .	73
4.3.1.	A modell log-likelihood függvénye . . . . .	73
4.3.2.	Az eltérés-négyzetösszeg redukált alakja . . . . .	74
4.3.3.	A szingulárisérték-felbontás (SVD) és az Eckart–Young–Mirsky approximációs tétel . . .	76
4.3.4.	Az optimális megoldás . . . . .	78
4.4.	A mortalitási index kiigazítása . . . . .	81

4.5. A kiigazított mortalitási index időbeli alakulása . . . . .	82
4.5.1. A modell felírása . . . . .	83
4.5.2. A paraméterek becslése . . . . .	83
4.5.3. A trend szignifikanciája . . . . .	84
4.6. Előrejelzés . . . . .	85
 <b>5. Esettanulmány: A magyar nyugdíjrendszer fenntartha-</b>	
<b>tóságáról</b>	<b>87</b>
5.1. Demográfiai előrejelzés . . . . .	88
5.1.1. A halandóság modellezése . . . . .	88
5.1.2. A termékenység modellezése . . . . .	90
5.1.3. Lakosságszám és időskori függőségi ráta . . . . .	93
5.2. A bevételek és kiadások modellezése . . . . .	94
5.3. Gazdasági feltételezések . . . . .	98
5.4. A modell validációja . . . . .	100
5.5. Eredmények és javaslatok . . . . .	100
5.6. Mikroszimulációs modellek . . . . .	108
 <b>III. Újabb halandóság-előrejelző módszerek és</b>	
<b>alkalmazásuk</b>	<b>113</b>
 <b>6. Az általánosított korcsoport–időszak–kohorsz (GAPC)</b>	
<b>modellcsalád</b>	<b>115</b>
6.1. A modell felírása . . . . .	115
6.2. Interpretáció . . . . .	117
6.3. A GAPC modellcsalád nevezetes tagjai . . . . .	118
6.3.1. A Poisson Lee–Carter (LC) modell . . . . .	118
6.3.2. A Renshaw–Haberman (RH) modell . . . . .	120



6.3.3.	A korcsoport–időszak–kohorsz (APC) modell . . .	121
6.3.4.	A Cairns–Blake–Dowd (CBD) modell . . . . .	122
6.3.5.	A Plat modell . . . . .	123
6.3.6.	Áttekintés és csoportosítás . . . . .	125
6.4.	A paraméterek becslése . . . . .	127
6.5.	Modellválasztás és illeszkedés . . . . .	129
6.5.1.	Egymásba ágyazott modellek közötti választás . .	129
6.5.2.	Egyedi, teljes és skálázott deviancia . . . . .	131
6.5.3.	Információs kritériumok . . . . .	132
6.6.	A mortalitási indexek és a kohorszhatás időbeli alakulása	133
6.6.1.	Modellspecifikáció . . . . .	133
6.6.2.	A paraméterek becslése . . . . .	135
6.7.	Előrejelzés . . . . .	137
6.7.1.	Pontbecslés . . . . .	137
6.7.2.	A bizonytalanság modellezése . . . . .	138
<b>7.</b>	<b>Esettanulmány: Élettartam-kockázat a nyugdíjcélú élet-</b>	
	<b>járadékok díjszámításában</b>	<b>141</b>
7.1.	A kérdés aktualitása . . . . .	142
7.2.	Adatok és módszerek . . . . .	144
7.3.	Életjáradékok statikus és dinamikus díjszámítása . . . .	149
7.4.	Eredmények . . . . .	151
	<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>155</b>

# Ábrák jegyzéke

1.1. Nemenkénti születéskor várható élettartamok Magyarországon (1900–2014, forrás: saját szerkesztés a KSH adatai alapján) . . . . .	16
1.2. A szavatoló tőke összetevői a Szolvencia II keretrendszerben (forrás: saját szerkesztés) . . . . .	18
3.1. Központi halandósági ráta ezerszerese a világ országai-ban 2014-ben (forrás: <a href="http://www.indexmundi.com">www.indexmundi.com</a> ) . . . . .	47
3.2. A KSH 2013. évi férfi néphalandósági táblájának részlete (forrás: KSH NKI) . . . . .	53
3.3. Születéskor várható élettartam években a világ országai-ban 2014-ben (forrás: <a href="http://www.indexmundi.com">www.indexmundi.com</a> ) . . . . .	55
3.4. Férfi koréves halálozási valószínűségek, kezdeti halandósági ráták és simított koréves halálozási valószínűségek (2013-ban, 0–84 évesekre, 10.000 főre, logaritmikus skálán, forrás: saját szerkesztés a KSH NKI adatai alapján) . . . . .	62
5.1. Becsült és előre jelzett $k_t$ mortalitási indexek (1980–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015]) . . . . .	89
5.2. Múltbeli és előre jelzett születéskor várható élettartamok (1950–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015]) . . . . .	90

5.3. A teljes termékenységi ráta múltbeli és előre jelzett értékei (1950–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015]) . . . . .	91
5.4. A korcsoportos termékenységi ráta múltbeli és előre jelzett értékei (2000–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015]) . . . . .	92
5.5. A népességszám múltbeli és előre jelzett értékei nemeként (1950–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015]) . . . . .	94
5.6. Az időskori függőségi ráta múltbeli és előre jelzett értékei (1950–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015]) .	95
5.7. A nyugdíjmodell felépítése (forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015]) . . . . .	96
5.8. Az alkalmazott makrogazdasági feltételezések (forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015]) . . . . .	98
5.9. A modell eredményeinek összehasonlítása az ONYF adataival (forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015]) . . . .	101
5.10. A Nyugdíjbiztosítási Alap főbb mutatóinak várható alakulása az alapforgatókönyv esetén (2014. évi áron, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015]) . . . . .	102
5.11. A Nyugdíjbiztosítási Alap főbb mutatóinak várható alakulása a makrogazdasági paraméterekre vonatkozó alternatív forgatókönyvek esetén (2014. évi áron, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015]) . . . . .	103

5.12. A Nyugdíjbiztosítási Alap főbb mutatóinak várható alakulása a nyugdíjkorhatár várható élettartamhoz igazított folyamatos emelése esetén (2014. évi áron, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015]) . . . . .	104
6.1. A GAPC modelles család néhány nevezetes tagja és a közöttük fennálló hierarchia (forrás: saját szerkesztés) . .	126
7.1. GAPC modellek illeszkedése a tesztidőszakon és a modellek effektív paraméterek száma (2005–2014, 65–84 éves korokban, forrás: saját szerkesztés) . . . . .	146
7.2. GAPC modellek illeszkedésének összehasonlítása a tesztidőszakon (2004–2013, forrás: saját szerkesztés) . . . . .	147
7.3. GAPC modellek illeszkedésének összehasonlítása a tesztidőszakon (2004–2013, forrás: saját szerkesztés) . . . . .	148

# Táblázatok jegyzéke

3.1. A legelterjedtebb interpolációs eljárások (forrás: saját szerkesztés Bowers és szerzőtársai [1997] alapján) . . . .	56
3.2. Néhány nevezetes halandósági törvény (forrás: saját szerkesztés) . . . . .	63
6.1. Néhány nevezetes GAPC modell jellemzői (forrás: saját szerkesztés) . . . . .	126
7.1. Összehasonlítás: a 65 éves korban várható hátralévő élettartam és az életjáradék egyszeri nettó díja (forrás: saját számítás és Májer–Kovács [2011]) . . . . .	152

# Köszönetnyilvánítás

Szeretném röviden kifejezni a hálámat néhány olyan embernek, akik különböző módokon hozzájárultak e könyv elkészültéhez.

Köszönettel tartozom Dr. Kovács Erzsébetnek az immár egy évtizede végzett közös munkánk során nyújtott folyamatos, áldozatos és számtalan területre kiterjedő szakmai és emberi támogatásért, Dr. Tasnádi Attilának az MTA–BCE „Lendület” Stratégiai Interakciók Kutatócsoportban való részvételi lehetőségért, amely óriási segítséget jelentett a kutatásaimban való elmélyüléshez, Bajkó Attila, Maknics Anita és Tóth Krisztián ifjú aktuáriusoknak a kiemelkedő színvonalú, lelkes modellezési és kutatómunkáért, Rézmovits Ádámnak a MIDAS-HU nyugdíj-mikroszimulációs modell elkészítésében való részvételi lehetőségért és az ennek során szerzett felbecsülhetetlen szakmai tapasztalatokért, Dr. Maarten H. van der Vlerknek és Dr. Wim K. Klein Haneveldnek a tudományos kutatás rejtelmeibe való bevezetésért és a folyamatos szakmai támogatásért, Dr. Deák Istvánnak rendkívül széles tudása megosztásáért és a kutatói pályával kapcsolatos iránymutatásért, Dr. Banyár Józsefnek a közös kutatásban való részvételi lehetőségért, valamint Dr. Demetrovics Jánosnak önzetlen segítségéért és a kutatásaimmal kapcsolatos hasznos észrevételeiért.

Köszönöm Dr. Arató Miklósnak, Dr. Baji Petrának, Dr. Májer István-

nak és Dr. Szüle Borbálának rendkívül hasznos lektori észrevételeiket. Hálával tartozom továbbá Molnárné Brinzik Katalinnak a KSH Népeségtudományi Intézettől kapott friss és részletes halandósági adatokért, melyeket munkám során felhasználtam.

Könyvem elkészültében elengedhetetlen segítséget jelentett számomra a Budapesti Corvinus Egyetem és a Magyar Nemzeti Bank együttműködése keretében kapott nagyvonalú támogatás.

A szövegben található esetleges hibákért és tévedésekért minden felelősség egyedül engem terhel.

# 1. fejezet

## Bevezetés

### 1.1. Az élettartam-kockázat problémája

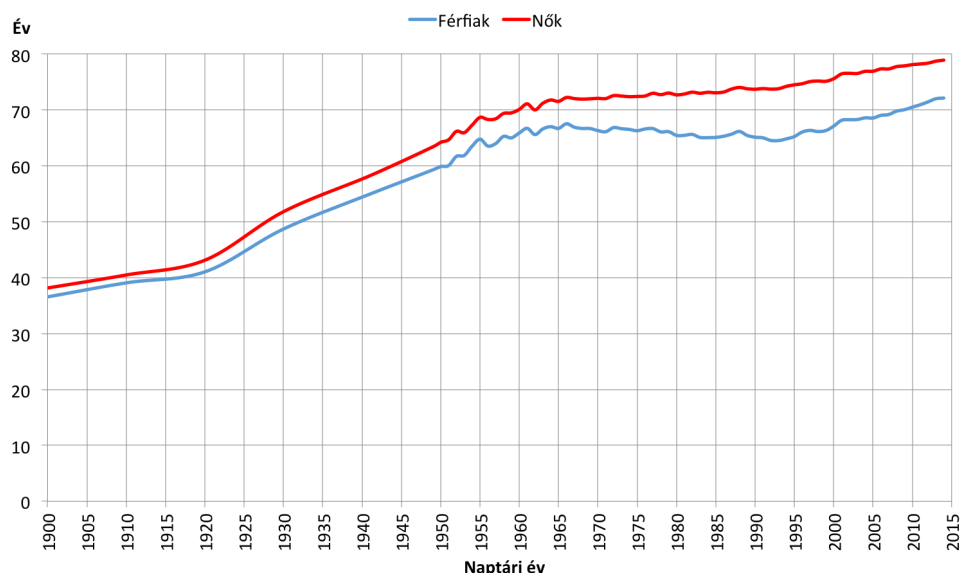
Az emberi élet hosszának előreláthatatlansága az idők kezdete óta foglalkoztatja az emberiséget. Bár az emberi élettartam egy-egy egyén esetén előzetesen többnyire nehezen megjósolható, nagy számú, egymáshoz kellőképpen hasonló egyén megfigyelt adatai alapján mégis számos gyakorlati célra megfelelően modellezhető. A halandósági modellezés fontos alkalmazási területei az élet- és nyugdíjbiztosítás, amelyekre az 5. és 7. fejezetekben bemutatandó két esettanulmány fókuszál.

Empirikus tény, hogy az emberi élettartam átlagos hossza az elmúlt két évszázad során jelentősen növekedett a fejlett országok túlnyomó részében, melynek hátterében többek között az orvostudomány fejlődése, a csecsemő- és gyermekhalandóság jelentős csökkenése, az élelmiszerellátás és a közegészségügyi helyzet javulása, valamint az emberi életmód jelentős átalakulása állnak. A növekedés mértéke országonként eltérő, de gyakran viszonylag rövid távon is érzékelhető.

A jelenség szemléltetése kedvéért az 1.1. ábrán látható a magyarországi



nemenkénti, években mért születéskor várható élettartamok alakulása 1900 és 2014 között. Az ábra alapján megállapítható, hogy a születéskor várható élettartam Magyarországon mind a férfiak, mind a nők esetén közel kétszeresére emelkedett az utóbbi valamivel több mint egy évszázadban.



1.1. ábra. Nemenkénti születéskor várható élettartamok Magyarországon (1900–2014, forrás: saját szerkesztés a KSH adatai alapján)

A kutatók és modellező szakemberek munkájuk során kevés ilyen egyértelműen pozitív, örömdetes társadalmi-gazdasági jelenséggel foglalkozhatnak. Ezt figyelembe véve valójában helyesebb lett volna a kissé negatív kicsengésű cím helyett például „Az emberi élettartam növekedéséből származó bizonytalanság modellezése” címet adni könyvemnek, jobban kihangsúlyozva a jelenség örömteli jellegét. Ennek ellenére mégis az aktuárius szakmában magyar nyelven is meghonosodott „*longevity risk*” kifejezés Májer–Kovács [2011] cikkében bevezetett fordítását, az *élettartam-kockázatot* helyeztem könyvem címének középpontjába, ezzel nyomatékosítva azt, hogy a kérdést szigorúan aktuáriusi – és nem

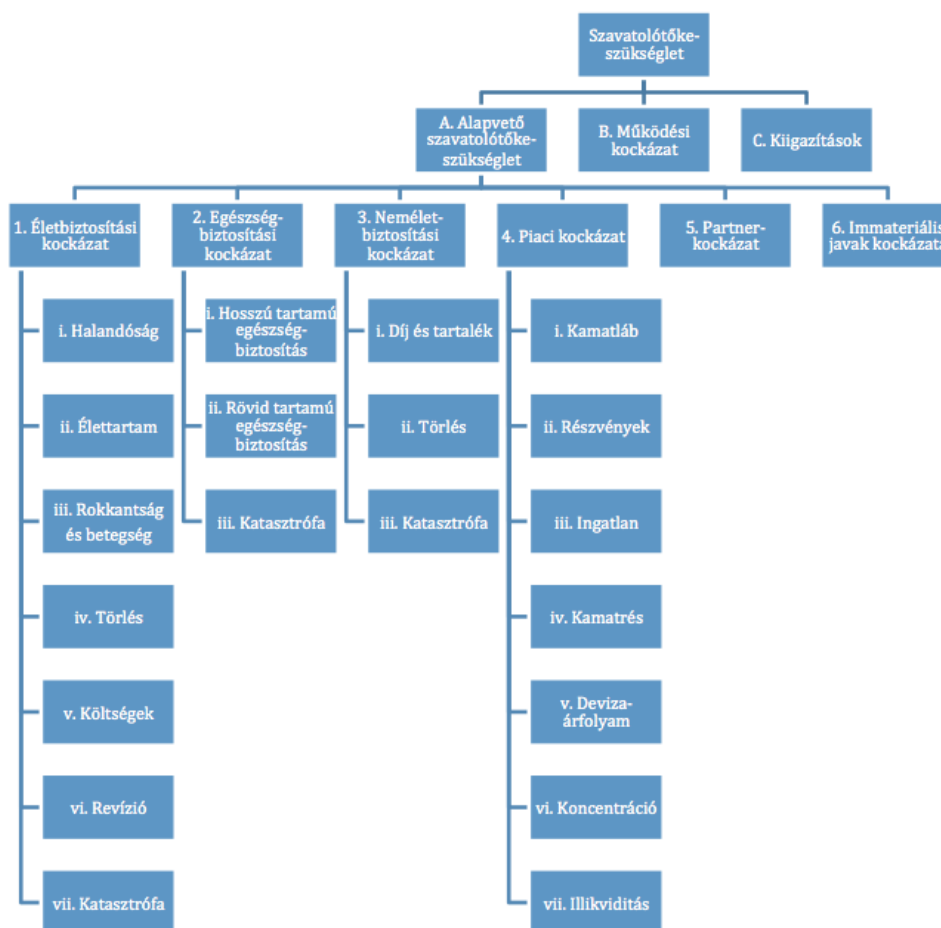
például demográfiai vagy kvantitatív pénzügyi – szemléletben igyekszem megközelíteni.

Az aktuáriusi élettartam-kockázat a közgazdaságtudományi szakirodalomban nem általánosan előforduló, alapvető fogalom, így némi további kifejtést igényel. Az élettartam-kockázat abból ered, hogy – a javuló élettartam-kilátások jelenségének másodlagos hatásaként – egyes pénzügyi intézmények (elsősorban a felosztó-kirovó elven működő állami nyugdíjrendszerek, a nyugdíjpénztárak és a járadéktermékeket értékesítő életbiztosítók) a jelenbeli halandósági statisztikákat a jövőre kivetítve csupán meglehetősen pontatlanul jelezhetik előre az intézmény jövőbeli bevételeit és kiadásait, így komoly tervezési hibát követnek el, és jelentős veszteségre számíthatnak a jövőben. Ezt az 5. és 7. fejezetekben bemutatandó esettanulmányok az állami nyugdíjrendszer, illetve a nyugdíjpénztárak és biztosítók példáján illusztrálják majd. A jelenség mindemellett egyéni szinten, az öngondoskodás keretében is értelmezhető, mivel az emelkedő várható élettartam a személyes időskori megélhetés tervezése során is kihívást jelent.

Az élettartam-kockázat szükségessé teszi a kifinomult, modern halandóság-előrejelző módszerek alkalmazását. Aktuáriusi számításokban betöltött szerepe mellett a jelenség aktualitását az adja, hogy 2016. január 1-étől, a Szolvencia II keretirányelv előírásainak gyakorlati hatályba lépésétől immár hatályos jogszabály is rendelkezik annak modellezéséről és kiemelt kezeléséről.

## 1.2. Élettartam-kockázat a Szolvencia II keretrendszerben

Az Európai Unióban működő biztosító társaságok és nyugdíjpénztárak kockázatkezelését és szavatolótőke-szükségletének meghatározását szabályozó, a gyakorlatban 2016. január 1-én életbe lépett Szolvencia II irányelv (EU [2009]) és az arra épülő kockázatkezelési keretrendszer külön figyelmet fordít az élettartam-kockázat modellezésére.



1.2. ábra. A szavatoló tőke összetevői a Szolvencia II keretrendszerben (forrás: saját szerkesztés)

A szavatoló tőke azt hivatott biztosítani, hogy a társaság egy év időtá-

von legalább 99, 5 százalék valószínűséggel fizetőképessé maradjon, vagyis – eltekintve a bevételek és kiadások várhatóan csupán 200 évente bekövetkező, kiugróan kedvezőtlen alakulásától – eleget tudjon tenni a vállalt kötelezettségeinek.<sup>1</sup>

A *szavatolótőke-szükséglet* Szolvencia II keretrendszer szerinti hierarchikus, lentől felfelé építkező szemléletű felépítését az 1.2. ábra szemlélteti. A szavatolótőke-szükséglet fő összetevői az *alapvető szavatolótőke-szükséglet*, a működési kockázat (lásd például Panjer [2006] könyvét és Vékás [2009] összefoglalóját) szavatolótőke-szüksége és a kiigazítások értéke.

Az alapvető szavatolótőke-szükséglet meghatározása hat, az 1.2. ábrán arab számokkal jelölt úgynevezett *modul* segítségével történik. A modulok szavatolótőke-szükségeit a modulok között feltételezett korrelációkat figyelembe véve szükséges aggregálni az alapvető szavatolótőke-szükséglet meghatározása érdekében. Az egyik ilyen – a jelen könyvben kitüntetett szerepű – modul az 1.2. ábrán 1. sorszámmal jelölt életbiztosítási kockázathoz tartozik.

A modulok további, az 1.2. ábrán kisbetűs római számokkal jelölt *almodulokból* állnak, melyek szavatolótőke-szükségletét – az almodulok között feltételezett korrelációkat figyelembe véve – aggregálva kapható meg az egyes modulok szavatolótőke-szüksége. Az 1.2. ábrán a ii. sorszám jelöli a könyv fókuszában álló élettartam-kockázat almodulját.

Az egyes almodulok szavatolótőke-szükségei a Szolvencia II keretrendszerben a sokkforgatókönyvekre épülő úgynevezett sztenderd mo-

---

<sup>1</sup> Az egy éves időtávon legalább 99, 5%-os fizetőképességi valószínűségre vonatkozó követelménynek az itt ismertetendő kockázati modulokra és almodulokra egyenként is teljesülnie kell.

dell vagy a vállalat egyéni jellegzetességeire szabott belső modell segítségével is meghatározhatók (EIOPA [2012]).<sup>2</sup> A sztenderd formula keretében az élettartam-kockázat szavatolótőke-szükségletét a nettó eszközérték csökkenése adja meg egy olyan feltételezett sokkhatás esetén, melynek keretében a modellben valamennyi halandósági ráta értéke azonnal és véglegesen 20 százalékkal csökken.

A Szolvencia II keretrendszer numerikus paramétereit az utóbbi években többször módosították a biztosítók és nyugdíjpénztárak együttműködésével elkészített öt *mennyiségi hatástanulmány* (angol rövidítéssel QIS) eredményeinek felhasználásával. Bár a szabályozás elődjéhez, a Szolvencia I-hez képest kockázattal kapcsolatos szemléletében kétségkívül rendkívül modern és előremutató, egyes részletei egyelőre kiforratlanok és módszertani szempontból bírálhatók. Ilyenekre néhány példa:

- Nem reális az az előírás, miszerint a kockázati almodulok és modulok szavatolótőke-szükségleteinek aggregálásához felhasználandó korrelációs mátrixok minden országban és biztosítási ágazatban azonosak.
- A korrelációs együtthatók segítségével történő aggregálási eljárás csak a többdimenziós normális eloszlás esetén támasztható alá matematikai szempontból, jóllehet a biztosításban gyakran előfordulnak vastag szélű eloszlások és nemlineáris kapcsolatok.
- A sztenderd formula által előírt sokkforgatókönyvek erősen leegyszerűsítő és ad hoc jellegűek: például Börger [2010] egy belső modell használatával bemutatja, hogy az élettartam-kockázat ese-

---

<sup>2</sup> Vállalati szinten úgynevezett hibrid modell is alkalmazható, melynek keretében a kockázatok egy része esetén a szavatolótőke-szükségletet a sztenderd formula, más része esetén pedig belső modellek segítségével határozza meg a társaság.

tén a fentebb már említett, egységes 20 százalékos halandósági sokkra vonatkozó forgatókönyvet hogyan kellene jóval finomabban differenciálni úgy, hogy azok egy éves időtávon valóban 99,5%-os fizetőképességi valószínűséget biztosítsanak.

Az élettartam-kockázat vállalatspecifikus belső modellek keretében történő, aktuáriusi szempontból megfelelő modellezéséhez elengedhetetlenek a későbbiekben ismertetendő halandóság-előrejelző módszerek.

### 1.3. Felépítés

A jelen tankönyv három fő részre tagolódik:

- Az I. részhez tartozó 2. fejezetben a halandósági modellezés, előrejelzés és az élettartam-kockázat gazdag nemzetközi és hazai szakirodalmi hátterét, a 3. fejezetben pedig a halandósági modellezés keresztmetszeti, statikus módszertanát mutatom be. A statikus módszertan figyelmen kívül hagyja a halandóság időbeli változását, ugyanakkor annak ismertetése szükséges a II. és III. részekben bemutatandó dinamikus megközelítések tárgyalásához.
- A II. részhez tartozó 4. fejezetben a halandóság-előrejelzés vezető módszerének tekintett Lee–Carter [1992] modell elméletét ismertetem. Itt igyekszem nagy hangsúlyt fektetni az eljárás matematikai hátterének a szakirodalomban megszokottnál mélyebb és szabatosabb bemutatására. Az 5. fejezetben a módszer gyakorlati alkalmazását mutatom be Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] cikke alapján. Az esettanulmány első alfejezetében bemutatom a hazai korfüggő halandósági és termékenységi ráták, a népesség, a

születéskor várható élettartam és az időskori függőségi ráta előrejelzését, a további alfejezetekben pedig egy kohorszalapú nyugdíjmodell segítségével ismertetem az állami nyugdíjrendszer főbb mutatóinak az elkövetkező húsz évre vonatkozó előrejelzését, továbbá a makrogazdasági és gazdaságpolitikai feltételezések változtatására vonatkozó érzékenységet. Az eredmények alapján lehetséges gazdaságpolitikai ajánlásokat is ismertetek a rendszer hosszú távú fenntarthatóságának biztosítása érdekében.

- A III. részhez tartozó 6. fejezet a Lee–Carter modellnél újabb, az aktuáriusi gyakorlatban egyre népszerűbb halandóság-előrejelző eljárásokat módszertanilag egységes tárgyalásban mutatja be az általánosított korcsoport–időszak–kohorsz (GAPC) modellcsalád (Villegas és szerzőtársai [2016]) keretében. A 7. fejezetben ismertetett esettanulmány arra a Vékás [2016] tanulmányra épül, melyben Májer–Kovács [2011] cikke nyomán, de azzal ellentétben a GAPC modellcsalád segítségével végzem el a hazai nyugdíjasok nyugdíjkorhatáron várható hátralévő élettartamának és a nyugdíjcélú életjáradékok egyszeri nettó díjának aktuáriusi becslését, miután kiválasztom a mintán kívüli előrejelzési pontosság kritériuma alapján javasolható legjobb modellváltozatot. Elemzésemben nagy hangsúlyt fektetek a paraméterbizonytalanság megfelelő modellezésére. Végezetül eredményeimet összevetem Májer–Kovács [2011] korábbi adatok és eltérő módszertan alapján számított hasonló értékeivel. A 7.1. alfejezetben röviden bemutatom azokat a járadékszolgáltatásra vonatkozó jogszabályi változásokat, amelyek a kérdés aktualitását adják, illetve felértékelik a halandóság-előrejelző módszertan szerepét.

Könyvem matematikai jellegű részeiben a téma erősen alkalmazott jellegénél fogva, a száraz tárgyalás elkerülése érdekében eltekintek a szigorú állítás-bizonyítás sorrendtől.



## I. rész

# A halandósági modellezés szakirodalmi háttere és keresztmetszeti módszertana



## 2. fejezet

# Szakirodalmi áttekintés

Jelen fejezet a téma nemzetközi és hazai szakirodalmát tekinti át. Mivel az élettartam-kockázat rendkívül széles körű, folyamatosan és gyors ütemben bővülő szakirodalommal rendelkezik, melynek csupán egy kis szeletére terjed ki e könyv, ezért a teljességre törekvés helyett kénytelen vagyok a főbb csapásirányok felvázolására szorítkozni, nagy hangsúlyt fektetve az új és ígéretes kutatási területek vázlatos ismertetésére.

A vonatkozó hazai szakirodalmat külön alfejezetben ismertetem, mivel lényegesnek tartom munkám magyarországi kutatásokhoz fűződő viszonyának meghatározását.

Némi további, az itt bemutatott forrásokhoz szorosan nem kapcsolódó szakirodalmi áttekintést tartalmaz majd az 5.6. alfejezet, amely az 5. fejezetben bemutatott alkalmazás mikroszimulációs továbbfejlesztési lehetőségeit ismerteti.

### 2.1. Nemzetközi szakirodalom

A témámhoz kapcsolódó nemzetközi szakirodalmat az áttekinthetőség kedvéért strukturáltan, tematikus szakaszokra bontva mutatom be.

### 2.1.1. A halandósági modellezés kialakulása

Az első mai értelemben vett halandósági táblát a halandósági modellezés atyjának tekinthető Halley [1693]<sup>1</sup> készítette. A halandósági táblák elterjedését követően számos kísérlet történt az emberi élettartam valószínűségeloszlásának egyszerű, paraméteres matematikai összefüggések segítségével történő leírására, melyeket a szakirodalom *halandósági törvények* (angolul *mortality laws*) néven ismer. Ezek részletesebb bemutatására a 3.3.4. szakaszban kerül majd sor. Az első – kezdetleges – halandósági törvényt de Moivre [1752] javasolta. Törvénye szerint az emberi élettartamok a születés és a feltételezett legmagasabb életkor közötti intervallumon egyenletes eloszlásúak. Gompertz [1825] törvénye szerint az életkorfüggő halandóság<sup>2</sup> az életkorral exponenciálisan nő, ami abból az empirikus megfigyelésből ered, hogy a Gompertz által megfigyelt életkorfüggő halandósági ráták nagyjából konstans hosszúságú intervallumonként kétszereződtek meg. Gompertz törvényét Makeham [1867] additív konstanssal bővítette, amit az életkortól függetlenül alakuló – jellemzően baleseti – halálozások indokolnak. Az általa javasolt összefüggés Gompertz–Makeham törvény néven is ismert. A logisztikus törvény (Perks [1932]) a Gompertz–Makeham törvény olyan módosítása, amely képes megragadni a legmagasabb életkorokban már lassuló ütemben növekvő halandóság<sup>3</sup> empirikus jelenségét. Weibull törvénye (Weibull [1951]) a megbízhatóság-elméletből származik, és konstrukciója egy egymástól függetlenül meghibásodó alkatrészekkel rendelkező mechanizmus élettartamát írja le. Újabb, összetettebb para-

---

<sup>1</sup> Az angol Edmond Halley nevét viseli a híres Halley-üstökös is.

<sup>2</sup> Precízebben: a halálozási intenzitás (lásd a 3.2.1. szakaszban).

<sup>3</sup> Gavrilov–Gavrilova [2011] amellett érvelnek, hogy ez a jelenség valójában irreleváns, illetve annak korábbi észlelései adat- és módszertani hibákból fakadtak.

méteres halandósági törvényekre példa a nyolc paraméterrel rendelkező Heiligman–Pollard törvény (Heiligman–Pollard [1980]).

Az életkorfüggő halandósági ráták előrejelzésének lehetséges módszere a megfigyelt adatokra illesztett halandósági törvények paramétereinek előrejelzése valamely idősoros modell segítségével (lásd például Forfar–Smith [1985]). Ezt a módszert az újabb eljárások elterjedése miatt manapság viszonylag ritkán alkalmazzák a gyakorlatban.<sup>4</sup>

### 2.1.2. A Lee–Carter modell

A halandóság előrejelzésében hatalmas áttörést hozott Lee–Carter [1992] cikke, amelyben a szerzők az életkorfüggő halandósági rátákra egy viszonylag egyszerű, naptári időszaktól és életkortól függő paramétekkel rendelkező log-bilineáris modell illesztését javasolják, amely meglepően jól írja le az Egyesült Államok 1900–1989. évi életkorfüggő halandósági rátáinak alakulását. A szerzők a paraméterek becslését követően a pontosság érdekében a naptári évtől függő paraméterek (az úgynevezett mortalitási index) újrabecslését javasolják, előírva a modell alapján várt és a ténylegesen megfigyelt halálesetek számainak egyezését. Az újrabecslült mortalitási index idősorát *autoregresszív integrált mozgóátlagolású*<sup>5</sup> (ARIMA, angolul *Autoregressive Integrated Moving Average*) folyamatnak tekintik, és az adatok alapján az eltolásos véletlen bolyongást találják a legmegfelelőbb modellspecifikációnak. A folyamat előrejelzése alapján a modellben az újrabecslült mortalitási index idősora várhatóan lineárisan csökken, és az előre jelzett halandó-

---

<sup>4</sup> Hasonló módszert alkalmaz Arató és szerzőtársai [2009] 2.2. alfejezetben ismertetett tanulmánya.

<sup>5</sup> Az ARIMA modellekről és az azokhoz szorosan kapcsolódó Box–Jenkins módszertanról részletesebben lásd például Asteriou–Hall [2015] könyvét.

sági ráták csökkenése exponenciális. Az azóta Lee–Carter modell néven elterjedt eljárás Deaton–Paxson [2001] szerint az ezredfordulóra a világ vezető halandóság-előrejelző módszerévé vált.

A Lee–Carter [1992] modell megjelenése óta az alkalmazásokkal kapcsolatos nemzetközi tapasztalatokról számtalan cikk látott napvilágot. A modell első nyolc évének tapasztalatairól Lee [2000] ad áttekintést. Tuljapurkar–Li–Boe [2000] tanulmánya a G7 országok fél évszadot felölelő adataira alkalmazza a modellt, és valamennyi vizsgált országban helytállónak találja annak a mortalitási index lineáris csökkenésére vonatkozó feltételezését. Csupán az illusztráció kedvéért néhány ország-specifikus tanulmány: például Argentínában Andreozzi és szerzőtársai [2011], Portugáliában Coelho [2001], Svédországban pedig Wang [2007] alkalmazták a modellt.

Fontos megjegyezni, hogy a Lee–Carter modell – a továbbiakban ismertetendő egyéb módszerekhez hasonlóan – statisztikai alapú, úgynevezett *extrapolatív eljárás*, amely a múltban megfigyelt trendek meghosszabbítására épül, figyelmen kívül hagyva a változások háttérében álló mögöttes (például orvostudományi, életmódbeli stb.) okokat. A halandósági folyamatok háttérben rejlő jelenségeket leíró *strukturális modellekről* például Booth–Tickle [2008] tanulmánya nyújt rövid összegzést, amelynek szerzői megállapítják, hogy ez a megközelítés jelentős kívánnivalókat hagy maga után az oksági kapcsolatok elégtelen ismerete miatt. Keilman ([1998] és [2008]) tanulmányaiban amellet érvel, hogy a nemzeti és nemzetközi statisztikai szolgálatok által készített, gyakran szubjektív szakértői véleményekre alapozott hivatalos demográfiai projekciók pontossága erősen megkérdőjelezhető, mivel azok a múltban szisztematikusan és jelentősen alábecsülték az emberi élettartam javulási üte-

mét és ezáltal az élettartam-kockázat nagyságát. Lee–Miller [2001] és Wong–Fupuy–Haberman [2004] megállapítják, hogy a Lee–Carter modellt visszemenőleg alkalmazva a hivatalos projekciónál jóval megbízhatóbb előrejelzések készíthetők.

A szakirodalomban nincs egyetértés azzal kapcsolatban, hogy vajon az emberi élettartam múltban tapasztalt, gyors ütemű növekedése a jövőben is folytatódik-e. Míg Wong–Fupuy–Haberman [2004] a pesszimista szakértői becslések pontatlansága és a Lee–Carter modell meglepően jó teljesítménye alapján arra következtet, hogy a növekedés fenntartható, addig a vitában szkeptikus álláspontra helyezkedők (például a maguk álláspontját „realistaként” aposztrofáló Carnes–Olshansky [2007]) megkérdőjelezzik az extrapolatív halandóság-előrejelző eljárások hosszú távú alkalmazhatóságát, és elképzelhetőnek tartják, hogy a fejlett országokban a születéskor várható élettartamok előbb-utóbb egyfajta plafonba ütköznek, sőt, akár csökkenőbe fordulnak majd.

### 2.1.3. A Lee–Carter modell bírálata és kiterjesztései

Számtalan tanulmány bírálja a Lee–Carter [1992] modell előfeltevéseit, és javasolja annak módosítását, illetve kiterjesztését. Egy egyszerű módosítás már Lee–Carter [1992] eredeti tanulmányában is szerepel, amelyben a szerzők az első világháborút követő spanyolnáthajárvány idején megfigyelt *halandósági sokk* kezelésére bináris változókkal bővítik a halandósági ráták egyenleteit a sokkhatás éveiben.

Wilmoth [1993] bírálja a Lee–Carter [1992] modell úgynevezett *homoszkedaszticitási feltevését*, miszerint az egyes korcsoport-naptári év kombinációkhoz tartozó logaritmikus halandósági ráták hibatagjainak

variációi azonosak, rámutatva arra, hogy a hibavariancia valójában közelítőleg fordítottan arányos az egyes korcsoport-naptári év kombinációkban megfigyelt halálesetek számaival. A probléma orvoslása érdekében a szerző a súlyozott legkisebb négyzetek módszerét javasolja a paraméterek becslésére a Lee–Carter [1992] tanulmányában szereplő szingulárisérték-felbontás helyett.

Lee–Miller [2001] az eredeti modell módosításaként azt javasolják, hogy a becsült mortalitási index kiigazítása ne a halálesetek száma, hanem a születéskor várható élettartam alapján történjen, továbbá hogy minden életkorban külön-külön a logaritmikus halandósági ráták utolsó ismert értékei legyenek az előrejelzések kiindulópontjai.

Alternatív megoldásként Brouhns és szerzőtársai [2002a] a normális eloszlású hibatagok alkalmazása helyett az egyes korcsoport-naptári év kombinációkhoz tartozó halálesetek számainak Poisson-eloszlását feltételezik. Az általuk javasolt – Poisson Lee–Carter modell néven is ismert – modellváltozat számos előnnyel rendelkezik Lee–Carter [1992] eredeti modelljéhez képest: többek között nem él a homoszkediszticitásra vonatkozó irreális feltevessel, a maximum likelihood becslés révén – Wilmoth [1993] módszeréhez hasonlóan – figyelembe veszi az egyes korcsoport-naptári év kombinációkhoz tartozó létszámokat, szükségtelessé teszi a mortalitási index erősen heurisztikus, a sztochasztikus modellkeretbe nem illeszkedő újrabecslését, valamint könnyedén beágyazható aktuáriusi alkalmazásokba. Ez utóbbira példaként Brouhns és szerzőtársai [2002a] egy életjáradék-piaci antiszelekciót elemző alkalmazást mutatnak be.

A Lee–Carter [1992] modellel szembeni gyakori kritika, hogy a szerzők értelmezésében az előre jelzett halandósági ráták konfidenciainter-



vallumai csupán a mortalitási index idősorának hibatagjaiból fakadó bizonytalanságot tartalmazzák, ismertnek tekintve a modell – valójában becsült – paramétereit. A modell ezáltal figyelmen kívül hagyja a paraméterbecslési eljárásból fakadó bizonytalanságot, jelentősen alábecsülve a tényleges előrejelzési hiba nagyságát. Brouhns és szerzőtársai [2005] megmutatják, hogy a Brouhns és szerzőtársai [2002a] által javasolt Poisson Lee–Carter modellváltozatban az előre jelzett halandósági ráták konfidenciaintervallumaiba a *paraméterbizonytalanság* is beépíthető a statisztikai becslélméletben Efron [1979] óta ismert bootstrap eljárás segítségével.

A Lee–Carter [1992] modellel és annak Poisson-változatával szemben egyaránt gyakran felmerülő további kritika, hogy az életkortól függő (keresztmetszeti) és naptári évtől függő (hosszmetszeti) hatásokon túl nem veszi figyelembe az azonos naptári időszakban született egyének halandóságának a születés időpontjától függő – a szakirodalomban *kohorszhatás* néven ismert – jellegzetességeit. A Lee–Carter modell legismertebb, kohorszhatást tartalmazó kiterjesztése a Renshaw–Haberman [2006] modell. Mivel ez az eljárás a gyakorlatban numerikusan instabillnak bizonyult, ezért Haberman–Renshaw [2011] újabb tanulmányukban modelljüket úgy egyszerűsítik, hogy az eredeti modellben életkortól függő kohorszhatást életkortól függetlennek tekintik.<sup>6</sup>

A halandóság-előrejelző modellek további bővítési iránya a halandóság hosszmetzeti változását leíró egydimenziós idősorok számának növelése, amelyekből az eddig ismertetett modellek csupán egyet tartalmaznak. Az ilyen irányban bővített modelleket a szakirodalom *többtényezős eljárásoknak* nevezi. Booth–MainDonald–Smith [2002] tanulmá-

---

<sup>6</sup> Sajnos még az egyszerűsített modell illesztése is gyakran komoly numerikus problémákkal jár. A témát bővebben Hunt–Villegas [2015] tanulmánya tárgyalja.

nya többek között a Lee–Carter [1992] modell – bizonyos szempontból természetes – többtényezős kiterjesztését mutatja be. Figyelembe véve, hogy a klasszikus Lee–Carter modellben a keresztmetszeti és hosszmetzeti hatások paraméterei a soronként centralizált logaritmusos halandósági ráták mátrixának szingulárisérték-felbontásával, majd a legnagyobb szingulárisértéknél kisebb szingulárisértékek elhagyásával nyerhetők, Booth–MainDonald–Smith [2002] – a főkomponenselemzés (Kovács [2011]) analógiájára – a további szingulárisértékek közül is megtartanak néhányat, így téve többtényezőssé a modellt. A szerzők továbbá ajánlásokat fogalmaznak meg a mortalitási index kiigazításával és a becslési időszak kiválasztásával kapcsolatban. A modell többtényezős kiterjesztésével kapcsolatban megállapítják, hogy az így nyert további tényezők nehezen építhetők be az előrejelzésekbe, illetve ausztrál adatokon kimutatják, hogy azok a teljes variancia igen kis hányadát magyarázzák, így a gyakorlatban elhanyagolhatók. Girosi–King [2007] megmutatják, hogy az általuk vizsgált 24 ország jelentős részében az egytényezős modell a logaritmusos halandósági ráták varianciájának 90% feletti hányadát képes megmagyarázni, így a jelentkező módszertani nehézségek mellett a további tényezők felhasználása nem növeli jelentősen a modell magyarázó erejét. Feltehetően ez az oka annak, hogy ez a modellváltozat nem vált különösen népszerűvé. Booth és szerzőtársai [2006] a Lee–Miller [2001] és Booth–MainDonald–Smith [2002] modellváltozatok, valamint az eredeti Lee–Carter modell előrejelző képességét hasonlítják össze egymással, és tíz fejlett ország adatainak vizsgálatával megállapítják, hogy az újabb modellváltozatok pontossága jellemzően felülmúlja az eredeti modellét.

A Lee–Carter modell és kiterjesztései az életkorfüggő termékenységi

ráták modellezésére is alkalmazhatók. Ilyen alkalmazásokra két példa: Hyndman–Ullah [2007] cikke, amely a Lee–Carter [1992] modell többtényezős kiterjesztését a simított korcsoportos halandósági és termékenységi ráták előrejelzésére alkalmazza ausztrál adatok felhasználásával, valamint Wiśniowski és szerzőtársai [2015] tanulmánya, amely a halandóság, a termékenység és a vándorlás elemzését közös bayes-i modellkeretbe ágyazza be a Lee–Carter [1992] eljárás kiterjesztésével, és e modell segítségével jelzi előre Nagy-Britannia népességének alakulását.

#### 2.1.4. Újabb halandóság-előrejelző módszerek

Haberman–Renshaw [2011] újabb modelljének nevezetes speciális esete az orvosi statisztikában már régóta alkalmazott korcsoport–időszak–kohorsz (röviden APC, vagy angolul Age–Period–Cohort) modell (Hobcraft és szerzőtársai [1982], illetve Carstensen [2007]), amelyben a kohorszhatáson kívül a hosszmetzeti hatás is – a Lee–Carter modelltől eltérően – független az életkortól.

Az aktuáriusi gyakorlatban a legelterjedtebb, újabb többtényezős halandóság-előrejelző módszerek a kéttényezős Cairns–Blake–Dowd [2006], valamint az azt általánosító, háromtényezős Plat [2009] modellek. Speciálisan az időskori halandóság modellezésére Plat [2009] modelljének olyan kéttényezős egyszerűsítését javasolja, amely a Cairns–Blake–Dowd modell kohorszhatással bővített változata. A korábban ismertetett eljárásoktól eltérően ezekben a modellekben paraméteres formában adott a halandósági ráták érzékenysége a mortalitási tényezők változására.

Lovász [2011] tanulmánya finn és svéd halandósági adatok felhasználásával számos, az eddigiekben tárgyalt halandóság-előrejelző modellt

összehasonlítja egymással, és az eredmények alapján aktuáriusi alkalmazások céljára a Plat [2009] modellt javasolja. Cairns és szerzőtársai [2009] nagy-britanniai adatokon a Cairns–Blake–Dowd [2006], amerikai adatokon pedig a Renshaw–Haberman [2006] modell illeszkedését találják a legmegfelelőbbnek, ugyanakkor megállapítják, hogy e modellek becsült paraméterei nem eléggé robusztusak a becslési időszak változtatására nézve. A szerzők a probléma megoldására a Cairns–Blake–Dowd modell kvadratikus életkorhatást tartalmazó bővítését javasolják.

A tudományos és gyakorlati szakmák részéről egyaránt jelentkező, természetes igény a Lee–Carter modell kritikája nyomán született, rendkívül szerteágazó halandóság-előrejelző eljárások átlátható, egységes módszertani keretbe foglalása. Erre többek között Hunt–Blake [2014], Villegas és szerzőtársai [2016], valamint Currie [2016] tettek kísérletet a közelmúltban. A Villegas és szerzőtársai [2016] által javasolt – számos, már létező és széles körben alkalmazott modellt felölelő – egységes modellkeret összefoglaló neve *általánosított korcsoport-időszak-kohorsz* (angolul *Generalized Age–Period–Cohort* vagy röviden GAPC) *modell*, a statisztikában és az aktuáriustudományokban elterjedt általánosított lineáris modell (angolul *Generalized Linear Model* vagy röviden GLM, lásd például McCullagh–Nelder [1989], illetve magyarul Gray–Kovács [2001]) analógiájára. A GAPC modellkeret az életkorban és időszakban log-bilineáris vagy logit-bilineáris, egy- és többtényezős, valamint kohorszhatástól mentes és azt tartalmazó eljárásokat egységesíti. Az így nyert, igen széles modellcsalád tagjai többek között a korábbiakban már ismertetett Poisson Lee–Carter (Brouhns és szerzőtársai [2002a]), Renshaw–Haberman [2006], korcsoport-időszak-kohorsz (Carstensen [2007]), Cairns–Blake–Dowd [2006] és Plat [2009]

modellek. A GAPC modellek keretében lehetőség nyílik többek között a paraméterbecslés, a modellválasztás és az előrejelzés egységes keretben történő tárgyalására és elvégzésére.

A bemutatott halandóság-előrejelző módszerek további fejlesztése az életkorfüggő halandóság simításának<sup>7</sup> és a halandóság előrejelzésének egységesítése, amelyre példa Currie és szerzőtársai [2004] p-spline interpolációs függvényeket felhasználó tanulmánya.

Egyéb halandóság-előrejelzési megközelítésekre példák a panel-ökonometriai eljárások használatát javasló Babel–Bomsdorf–Schmidt [2008], illetve a Lee–Carter modellbeli becsült mortalitási index változása és egyes makroökonómiai változók változásai közötti összefüggéseket elemző Hanewald [2009] tanulmányok. Hanewald [2009] elemzésében arra a következtetésre jut, hogy hat fejlett országban gazdasági fellendülés esetén jellemzően kissé mérséklődik a halandóság csökkenési üteme, tehát az emberi élettartam javulása enyhén kontraciklikus. Eredményét a halálokok közötti, gazdasági növekedéstől függő átrendeződéssel magyarázza.

### 2.1.5. Többdimenziós halandóság-előrejelzés

Számos tanulmány foglalkozik a különböző populációkra készített halandósági előrejelzések koherens keretbe foglalásával. Lee [2000] például a Lee–Carter [1992] modellben nemenkénti előrejelzések esetén egységes férfi és női mortalitási index előírását javasolja, amennyiben lényeges szempont az előrejelzések koherenciája. Li–Lee [2005] megállapítják, hogy a Lee–Carter [1992] modellben a különböző populációkban egymástól hosszú távon nem divergáló előrejelzések szükséges és elégséges

---

<sup>7</sup> A téma valamivel részletesebb tárgyalására a 3.3.4. szakaszban kerül majd sor.

feltétele, hogy a mortalitási indexek eltolásos véletlen bolyongásainak sztochasztikus trendparaméterei és az index változására vonatkozó életkorfüggő érzékenységi paraméterek egyaránt azonosak legyenek a vizsgált populációkban. Ezen túl a szerzők előírják a mortalitási indexek idősorainak azonosságát is, így az általuk javasolt koherens modellben az egyes populációkban csak az életkorfüggő átlagos logaritmikus halandósági szintek különböznek egymástól. Tizenöt ország adatait megvizsgálva megállapítják, hogy tizenegy ország esetén a koherens előrejelzések nagyjából megegyeznek az egyenkénti előrejelzésekkel, négy másik ország esetén pedig egy-egy országspecifikus komponenssel bővítve az egyenleteket már elfogadható a közös modell. Li–Lee [2005] amellet érvelnek, hogy a javasolt koherens keretben egy adott ország esetén a hasonló demográfiai adottságokkal rendelkező országok adatainak felhasználása javíthatja az előrejelzések pontosságát. Cairns és szerzőtársai [2011] a bayes-i modellkeretbe beágyazott korcsoport-időszak-kohorsz (Carstensen [2007]) modellt javasolják koherens előrejelzésre. Ígéretes kutatási terület a halandósági ráták halálozási okok szerint bontott előrejelzése, amely pontosabbá teheti az előrejelzéseket. A halálozási okokat egymástól függetlenül jelzi előre Wilmoth [1995] tanulmánya, amely az aggregált előrejelzéshez képest pesszimistább becsléseket közöl a várható élettartam növekedési ütemére, illetve Di Cesare–Murphy [2009] cikke, amely nagy-britanniai adatok segítségével három lényeges halálozási ok trendjeit jelzi előre különböző népszerű halandóság-előrejelző módszerek felhasználásával.

A fejlettebb megközelítések különös figyelmet fordítanak a halálozási okok közötti korrelációk statisztikai szempontból megfelelő kezelésére. Arnold-Gaille–Sherris [2016] a többváltozós idősorelemzésből kölcsön-

zött kointegrációs, vektor-autoregressziós és vektor-hibakorrekciós eljárásokat alkalmazzák, és öt halálokot elemeznek az Egyesült Államok, Japán, Franciaország, Nagy-Britannia és Ausztrália adatai alapján. Tanulmányukban megállapítják, hogy a modell inkább a halálokok közötti összefüggések vizsgálatára alkalmas, de a megközelítés kiforratlansága miatt nem javasolják annak előrejelzési célú használatát. Alai–Arnold–Gaille–Sherris [2015] a különböző halálokokat és a túlélést mint versengő kimeneteleket hosszmetzeti multinomiális logisztikus regresszió segítségével modellezzik, és modelljüket franciaországi adatok alapján előrejelzésre is felhasználják. Korrelált kockázatok (például házastársak élettartamai vagy különböző betegségek okozta halálesetek) modellezésére a kvantitatív modellezésben az ezredforduló óta elterjedt kopulák szintén alkalmazhatók.<sup>8</sup> Dimitrova–Haberman–Kaishev [2013] tanulmánya ezzel a módszertannal modellezi a halálokok közötti összefüggéseket, és megállapítja, hogy az ismertetett eredmények sztochasztikus halandóság-előrejelzésre is felhasználhatók.

A várható élettartamon túl külön figyelmet érdemel a várható egészséges élettartam mutatója is, amelyet az Egészségügyi Világszervezet (WHO) a születéstől a rokkantság vagy halál valamelyikének bekövetkezéséig eltelt idő várható értékeként definiál. A többdimenziós halandóság-előrejelző módszertan ennek vizsgálatára is alkalmazható: például Májer és szerzőtársai [2013] cikke 55 éves és annál idősebb holland egyének adatai alapján a Lee–Carter [1992] modell segítségével jelzi előre az egészséges, rokkant és elhunyt állapotok közötti átmenetvalószínűségeket.

---

<sup>8</sup> A kopula a többdimenziós egységkockán értelmezett, a  $(0, 1)$  intervallumon egyenletes peremeloszlásokkal rendelkező eloszlásfüggvény, melyet tetszőleges peremeloszlásokkal kombinálva bármely többdimenziós eloszlásfüggvény előállítható Sklar tétele alapján (lásd például Nelsen [2006] vagy magyarul Vékás [2012]).

### 2.1.6. Az élettartam-kockázat

#### pénzügyi hatásai

Az élettartam-kockázat pénzügyi hatásairól a Nemzetközi Valuta-alap készített átfogó jelentést (IMF [2012]), amely egyebek mellett megállapítja, hogy a 63 éves korban várható hátralévő élettartam minden egy évnyi növekedése hozzávetőleg 3 százalékkal növeli a nyugdíjkötelezettségek értékét az Egyesült Államokban.

Brouhns és szerzőtársai [2002b] cikke az élettartam-kockázat életjáradékok díjszámításában betöltött szerepét vizsgálja a Brouhns és szerzőtársai [2002a] tanulmányában bemutatott Poisson Lee–Carter modell segítségével. A szerzők a halandóság-előrejelző modell paramétereit többdimenziós normális eloszlásból szimulálják (Deák [1990] és Gassmann–Deák–Szántai [2002]) a maximum likelihood becslőfüggvény értéke és aszimptotikus kovarianciamátrixa alapján, majd minden egyes replikációra kiszámítják az életjáradék nettó díját, így közelítve annak eloszlását. Hári és szerzőtársai [2008] cikke hasonló célra a kéttényezős Lee–Carter modellt (Booth–MainDonald–Smith [2002]) alkalmazza. Tanulmányukban Richards–Currie [2009] a modellkockázat szerepére hívják fel a figyelmet, kimutatva, hogy az alkalmazott modellfeltevések hatása pénzügyileg jelentős lehet az életjáradékok piacán.

Börger [2010] cikkében az élettartam-kockázat szavatolótőke-szükségletét a Szolvencia II keretrendszerben a sztenderd formula és a Lee–Carter [1992] modellre épülő belső modell segítségével egyaránt kiszámítja, és megállapítja, hogy a sztenderd formula leegyszerűsítő sokkforgatókönyve nincs összhangban a keretrendszer által előírt 99,5 százalékos kvantilis elvével. Ezért összetettebb sokkforga-



tókönyvek használatát javasolja.

Csupán illusztrációként néhány prominens forrás az élettartam-kockázat értékezésében nem tárgyalta, kvantitatív pénzügyi és befektetési vonatkozásaival kapcsolatban: az élettartam-kockázat értékpapírosítással – mint a pénzügyi piacokon az ezredforduló óta feltűnt új jelenséggel – például Krutov [2006] és Cairns–Blake–Dowd [2008], az ennek keretében megjelent longevity kötvények árazási kérdéseivel Blake és szerzőtársai [2006] és Bauer és szerzőtársai [2010], a kapcsolódó „longevity swap” csereügyletekkel pedig Dowd és szerzőtársai [2006] tanulmánya foglalkozik.

## 2.2. Hazai kutatások és alkalmazások

A történelmi Magyarország első halandósági tábláját Fáy [1854] készítette, azonban ezt követően csak hosszú szünet elteltével, a XX. század elején készült újra hasonló számítás hazánkban. Az 1900–1968. évek magyarországi halandósági tábláit és azok módszertani hátterét Pallós [1971] műve foglalja össze.

Csupán illusztrációként három, a hazai népesség részcsoportjainak halandóságára vonatkozó munka: a hazai halandóságot iskolázottság szerinti bontásban vizsgáló Hablicsek–Kovács [2007], valamint a nyugdíjban és nyugdíjszerű ellátásban részesülők halandóságával foglalkozó Hablicsekné–Hollósné [2007] és Molnár–Hollósné [2015] tanulmányok. A halálozás oka szerint bontott halandósági trendekkel foglalkozik Kovács [2012] írása.

Baran és szerzőtársai [2007] a Lee–Carter modell többtenyezős változatát alkalmazzák hazai adatokon, és az illesztett háromtenyezős modell

alapján megállapítják, hogy az 1949–2003. évek adatai alapján nyert előrejelzések nem megfelelők a mortalitási indexek trendjeiben bekövetkezett strukturális törések miatt, amelyek az 1989–2003 közötti bázisidőszak esetén azonban már nem jelentkeznek. A szerzők szerint a modell segítségével nyert előrejelzéseket óvatosan kell kezelni a hazai halandóság múltbeli változékonysága miatt.

Mivel a járadékban részesülők halandósága jelentősen eltérhet a néphalandóságtól, és a hazai életjáradék-piac rövid története és alacsony volumene miatti szűkös tapasztalatok általában nem teszik lehetővé a járadékszolgáltatók számára a megbízható, vállalatspecifikus halandósági táblák készítését, ezért Arató és szerzőtársai [2009] tanulmánya más országok olyan, múltbeli halandósági tábláinak használatát javasolja, amelyek kellőképpen hasonlók az előrejelzendő adatokhoz. A megfelelő referenciatábla kiválasztására három lehetséges távolságmértéket javasolnak, és ismertetnek egy eljárást a táblák egyezésére vonatkozó teszt kritikus értékeinek Monte Carlo szimulációjára (Deák [1990]). A szerzők megállapítják, hogy a 60–90 év közötti életkorokban az Egyesült Államok 1950. évi férfi és 1970. évi női halandósági táblái meglehetősen jól illeszkednek a 2000. évi hazai halandósági tapasztalatokhoz. A referenciatáblák segítségével végzendő előrejelzés céljából bemutatnak továbbá egy egyszerű paraméteres halandósági törvényre épülő előrejelző eljárást és annak egy lehetséges alkalmazását is.

Májér–Kovács [2011] tanulmánya a 65–100. korévek 1970–2006. évi halandósági adataira a Lee–Carter [1992] modellt illeszti, és a klasszikus statikus, keresztmetszeti halandósági tábla és a halandóság előrevetítése alapján egyaránt kiszámítja a jelenlegi nyugdíjkorhatár betöltésekor, 65 évesen várható hátralévő élettartamot és a nyugdíjcélú életjáradék

egyszeri nettó díját<sup>9</sup>. A szerzők eredményei alapján a nyugdíjazáskor várható élettartamot 6,33%-kal, az életjáradék egyszeri nettó díját pedig 4,51%-kal becsüli alá az élettartam-kockázatot figyelmen kívül hagyó keresztmetszeti számítás. A tanulmány két eltérő megközelítésben közöl konfidenciaintervallumokat a nyugdíjazáskor várható élettartamra és az életjáradék nettó díjára: az első esetben Lee–Carter [1992] nyomán csupán a mortalitási index folyamatának véletlen hibatagjait tekintik a bizonytalanság forrásának, míg a második esetben a mortalitási index sztochasztikus trendparaméterét is valószínűségi változóként kezelik, így az előrejelzési hiba részeként – részben – a becslés során fellépő paraméterbizonytalanságot is figyelembe veszik. Megmutatják továbbá, hogy élettartam-kockázat jelenlétében még végtelen nagy kockázatközösség esetén, határértékben sem válik kockázatmentessé a nyugdíjcélú életjáradék nyújtása a járadékszolgáltató számára.

Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] cikke a Lee–Carter [1992] modell alapváltozatát alkalmazza az életkorfüggő halandósági és termékenység-ráták előrejelzésére és a magyar nyugdíjrendszer fenntarthatóságának vizsgálatára. E tanulmány részletes bemutatására az 5. fejezetben kerül majd sor.

Arató–Dryden–Taylor [2006] hierarchikus bayes-i térstatisztikai modellt illesztenek 150 magyarországi kistérség életkorfüggő halálozási adataira. A kistérségenként különböző életkorfüggő halandósági ráták megbízhatósági intervallumait a szerzők Markov-lánc Monte Carlo szimuláció segítségével állítják elő, és relatív kockázati szinteket is becsülnek a

---

<sup>9</sup> Az egyszeri nettó díj az az azonnali befizetés, amelyért cserébe az adott szerződésen – a díjtartalékon a technikai kamatlábnak megfelelő hozamot elérve – a járadékszolgáltató díjbevételeinek és járadék-kifizetéseinek várható jelenértékei megegyeznek (Banyár [2003]). A nettó díj közgazdasági értelemben nem tekinthető árnak. Az ár itt a nettó díjon felül felszámított költségekhez kapcsolódik (Banyár–Vékás [2015]).

nem és településméret változók kategóriáira.

A Lee–Carter [1992] modellben is alkalmazott szingulárisérték-felbontás általánosításait mutatja be Ispány és szerzőtársai [2010] tanulmánya, melynek szerzői a javasolt módszereket hazai néphalandósági adatok modellezésére és vizualizációjára alkalmazzák.

Ágoston [2001] tanulmánya három olyan, a halandósági ráták becslésére alkalmazható módszert mutat be, amelyek cenzorált megfigyelések (például év közben felmondott életbiztosítási szerződések) jelenlétében is alkalmazhatók: a Kaplan–Meier, aktuáriusi és maximum likelihood becslőfüggvényeket. Az orvosi statisztikában régóta alkalmazott, halandóság becslésére is alkalmazható Kaplan–Meier és Cox-regressziós modelleket magyar nyelven Vékás [2011] ismerteti. Bár nem szigorúan hazai alkalmazás, mégis itt említem meg Májer és szerzőtársai [2011] cikkét, amely Cox-regresszió segítségével elemzi a rokkant egyének halandóságát, és megállapítja, hogy várható élettartamuk 10 évvel marad el az egyéb csoportokétól, amelyből 6 év magyarázható a két populáció között az életmód, a társadalmi-demográfiai jellemzők és a krónikus betegségek terén fennálló különbségekkel.

A nyugdíjpénztári életjáradékok elméleti és gyakorlati kérdéseiről és modellezési problémáiról Banyár [2012] nyújt széles körű áttekintést. Az élettartam-kockázat, a népességöregedés, valamint a rokkantnyugdíjasok magas száma okozta anomáliák hazai nyugdíjrendszerben betöltött szerepét mutatják be Kovács–Szüle ([2005] és [2006]) munkái. Szepesváry [2015] cikkében a Lee–Carter modell felhasználásával modellezi az élettartam-kockázatot a Szolvencia II keretrendszerben.

## 3. fejezet

# A halandósági modellezés módszertani alapjai

Ebben a fejezetben a halandóság keresztmetszeti, statikus modellezéséről adok áttekintést a halandóság statisztikai mérőszámaiból kiindulva a folytonos és diszkrét matematikai modelleken át az aktuárius szakmában elengedhetetlen eszközként szolgáló halandósági tábla konstruálásáig és teszteléséig. Előre megjegyzem, hogy tárgyalásomban – a téma sokszínűségéből adódóan, az egyszerűséget szem előtt tartva – néhol keverednek a statisztikában, valószínűségszámításban és az aktuárius-tudományokban szokásos jelölésmódok.

### 3.1. A halandóság statisztikai mérőszámai

A halandóság múltbeli adatok alapján történő számszerűsítésének leg-alapvetőbb leíró statisztikai eszköze a *halandósági ráta* (más néven *halálózási arányszám*), amely egy választott időszak és populáció vonatkozásában értelmezhető, és az adott időszak során az adott populációban

bekövetkezett halálozások számának a populáció létszámához viszonyított arányaként számítható ki. Képlettel felírva:

$$m = \frac{D}{E}. \quad (3.1)$$

ahol  $m$  a halandósági ráta,  $D \in \mathbb{N}$  a vizsgált időszakban elhunytak száma,  $E > 0$  pedig a vizsgált populáció valamilyen módon értelmezett létszáma. E könyvben a vizsgált időszak hossza mindig egy év lesz.

A populáció létszámát pontosabban definiálni szükséges: érthető alatta a vizsgált időszak kezdetén élő egyének száma (úgynevezett *kezdeti kitettség*, angolul *initial exposed to risk*, jelölése:  $E^0$ ) vagy a vizsgált időszak alatt élő egyének átlagos létszáma (úgynevezett *központi kitettség*, angolul *central exposed to risk*, jelölése:  $E^c$ ) is. Ez utóbbi a vizsgált időszak kezdetén életben lévő egyénekre a vizsgált időszakban megélt egyéni időmennyiségeket összegezve számítható ki.<sup>1</sup>

Kezdeti kitettség alkalmazása esetén *kezdeti halandósági rátáról* (angolul *initial death rate*, jelölése:  $m^0$ ), központi kitettség esetén pedig *központi halandósági rátáról* (angolul *central death rate*, jelölése:  $m^c$ ) beszélhetünk. A kétféle halandósági ráta közötti kapcsolat a vizsgált időszakban elhunyt egyének által megélt időmennyiségektől függ. Ha a vizsgált időszak során elhunyt, az időszak kezdetén még élő egyének átlagosan  $A > 0$  egységnyi időt éltek az időszak kezdetétől számítva, akkor a kétféle kitettség közötti kapcsolat:

$$E^c = E^0 - (1 - A)D. \quad (3.2)$$

---

<sup>1</sup> A központi kitettség mértékegysége fő és év is lehet, attól függően, hogy átlagos létszámnak vagy összes megélt időmennyiségnek tekintjük.

Így a (3.1) és (3.2) összefüggések alapján adódik a kétféle halandósági ráta közötti kapcsolat:

$$\begin{aligned} m^c &= \frac{D}{E^c} = \frac{D}{E_0 - (1-A)D} = \frac{\frac{D}{E^0}}{\frac{E_0 - (1-A)D}{E^0}} = \frac{m^0}{1 - (1-A)m^0}, \\ m^0 &= \frac{m^c}{1 + (1-A)m^c}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Gyakori az  $A = \frac{1}{2}$  egyszerűsítő feltevés, miszerint a vizsgált időszakban elhunytak átlagosan az időszak feléig éltek. Ebben az esetben a (3.3) összefüggés következtében a kétféle halandósági ráta egymásból az alábbi képletek segítségével származtatható:

$$\begin{aligned} m^c &= \frac{m^0}{1 - \frac{1}{2}m^0}, \\ m^0 &= \frac{m^c}{1 + \frac{1}{2}m^c}. \end{aligned}$$

Könnyen belátható, hogy minden esetben fennállnak az

$$\begin{aligned} 0 &\leq m^0 \leq 1, \\ m^0 &\leq m^c \end{aligned}$$

összefüggések, és a központi halandósági ráta a kezdeti halandósági rátával ellentétben egységnyinél nagyobb értéket is felvehet.

**1. Példa.** *Magyarország lakossága 2014. január 1-én  $E^0 = 9.877.365$  fő volt, és az év során  $D = 126.308$  halálozást regisztráltak. Ekkor a 2014. évi országos kezdeti halandósági ráta értéke*

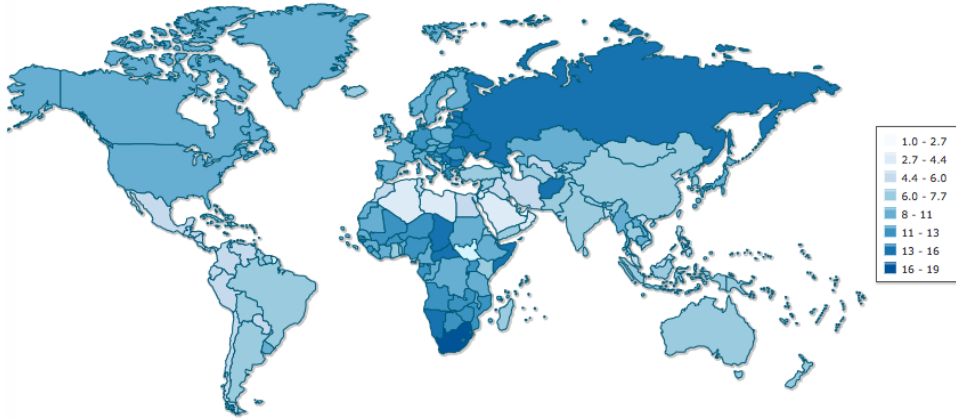
$$m^0 = \frac{D}{E^0} = \frac{126.308}{9.877.365} \approx 0,01279,$$

az  $A = \frac{1}{2}$  év feltételezés mellett pedig a központi kitettség értéke a (3.2) összefüggés alapján

$$E^c = E^0 - \frac{1}{2}D = 9.877.365 - \frac{1}{2}126.308 = 9.814.211,$$

így a 2014. évi országos központi halandósági ráta értéke

$$m^c = \frac{D}{E^c} = \frac{126.308}{9.814.211} \approx 0,01287.$$



3.1. ábra. Központi halandósági ráta ezerszerese a világ országaiban 2014-ben (forrás: [www.indexmundi.com](http://www.indexmundi.com))

Illusztrációképpen a 3.1. ábra a központi halandósági ráta országonkénti alakulását szemlélteti a világon a 2014. évben. Ugyanekkor az egész világra nézve a ráta értéke 0,00789 volt. Érdekes megfigyelni, hogy számos fejlődő országban a fejlett országok többségéhez képest kedvezőbb a ráta értéke, ami a fejlődő országok fiatalosabb korösszetételével magyarázható. Azonos korcsoportok rátáit összehasonlítva már megmutatkozna a fejlődő országok jelentős hátránya.

A kezdeti és központi halandósági ráták közötti módszertani különbségtételen túl számos különböző típusú halandósági rátát szokás meg-



különböztetni a vizsgált populáció szerint:

- *Életkor szerint*: életkortól független (úgynevezett nyers) és életkorfüggő (korévenként vagy bővebb korcsoportonként bontott) halandósági ráták,
- *Nem szerint*: uniszex, férfi és női halandósági ráták,
- *Lakóhely szerint*: országos, regionális, megyei, városi stb. halandósági ráták,
- *Egyéb szelekciós változók szerint*: például nyugdíjasok, házasok, egy adott biztosító valamely termékének ügyfelei, egy vállalat alkalmazottai, a saját bevallásuk szerint napi három száznál több cigarettát fogyasztók stb. halandósági rátái.

E könyv további fejezeteiben kitüntetett szerepet játszanak majd az életkorfüggő halandósági ráták, melyek esetén a továbbiakban az adott  $x \in \{1, 2, \dots, X\}$  korcsoportot alsó index jelöli majd. Ennek megfelelően az életkorfüggő kezdeti és központi halandósági ráták képletei a (3.1) összefüggés alapján:

$$\begin{aligned} m_x^0 &= \frac{D_x}{E_x^0} \quad (x = 1, 2, \dots, X), \\ m_x^c &= \frac{D_x}{E_x^c} \quad (x = 1, 2, \dots, X). \end{aligned} \tag{3.4}$$

## 3.2. A halandóság matematikai modellezése

A múltbeli adatokon nyugvó, leíró statisztikai szemléleten és annak korlátain az élettartamok hosszára vonatkozó, valószínűségi számítási alapokra épülő, sztochasztikus modell feltételezésével lehetséges túllépni.

A továbbiakban az *élettartam* kifejezés (jelölése:  $L$ ) minden esetben valamely években mért, nemnegatív valószínűségi változóra fog utalni.

A halandóság modellezésében kiemelt jelentőségű a *túlélési függvény* (angolul *survival function*) fogalma, amely az élettartam valószínűség-eloszlását jellemzi. Az  $L$  élettartam túlélési függvényén azt a  $G : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$  függvényt szokás érteni, amelyre

$$G(y) = \mathbb{P}(L \geq y) \quad (y \geq 0).$$

Nyilvánvalóan teljesülnek a

$$G(0) = 1,$$

$$G(y) = 1 - F(y) \quad (y \geq 0)$$

összefüggések, ahol  $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$  az  $L$  élettartam eloszlásfüggvénye.

Ha a modellezett egyén már betöltött egy adott  $x \geq 0$  életkort, akkor  $L - x$  *hátralévő élettartamának* valószínűségeloszlása az  $L \geq x$  feltétel melletti feltételes eloszlásként modellezhető megfelelően. Ezt ragadja meg a  $G_x : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$  ( $x \geq 0$ ) *reziduális túlélési függvény* fogalma:

$$G_x(y) = \mathbb{P}(L - x \geq y | L \geq x) = \frac{\mathbb{P}(L \geq x + y)}{\mathbb{P}(L \geq x)} = \frac{G(x + y)}{G(x)} \quad (x, y \geq 0).$$

Fontos mutatószám az  $x \geq 0$  éves korban *várható hátralévő élettartam*, melynek jelölése és kiszámítási módja:

$$e_x = \mathbb{E}(L - x | L \geq x) = \int_x^\infty G_x(y) dy \quad (x \geq 0), \quad (3.5)$$

illetve annak  $x = 0$  melletti nevezetes speciális esete, az

$$e_0 = \mathbb{E}(L) = \int_0^\infty G(y)dy \quad (3.6)$$

*születéskor várható élettartam.*

Az  $L$  élettartam eloszlásának konkrét specifikációjában két jellegzetes irány különül el aszerint, hogy a modellező folytonos vagy – jellemzően egész értékű – diszkrét valószínűségi változónak tekinti azt. E két modellkeretet külön szakaszokban tárgyalom.

### 3.2.1. A folytonos modell és a halálozási intenzitás

Folytonos eloszlások használata esetén célszerű a halandóság mértékét az egyes életkorokban az adott pillanatra vonatkoztatni, úgy, hogy az így kapott mérőszám ne függjön a vizsgált időszak hosszától. Persze adott pillanatban a halálozási valószínűség mindig nulla, mivel folytonos eloszlás esetén bármely  $y \geq 0$  értékre

$$\mathbb{P}(L = y) = 0.$$

Határértékekben viszont értelmezhető egyfajta pillanatnyi évesített halálozási valószínűség, ha egy rövid időtartam évesített halálozási valószínűségében az időtartam hossza nullához tart. Az így kapott mutatószám szokásos neve *halálozási intenzitás* (más néven *hazárdráta* vagy *kockázati ráta*, angolul *hazard rate*, Ágoston–Kovács [2000]):

$$\mu(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\mathbb{P}(L < y + \varepsilon | L \geq y)}{\varepsilon} \quad (y \geq 0).$$

A halálozási intenzitás tehát – bár maga nem valószínűség – egyfajta *évesített pillanatnyi halálozási valószínűségnek* tekinthető. A halálozási intenzitás fenti definíciója tartalmi szempontból igen szemléletes, ugyanakkor a gyakorlatban a halálozási intenzitásfüggvényt többnyire könnyebb a következő összefüggés alapján kiszámítani:

$$\mu(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{F(y + \varepsilon) - F(y)}{\varepsilon G(y)} = \frac{f(y)}{G(y)} \quad (y \geq 0, G(y) > 0),$$

ahol  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  az  $L$  élettartam sűrűségfüggvénye.

Használatos még a *kumulált halálozási intenzitás* fogalma, amely a halálozási intenzitásfüggvényből integrálással számítható ki:

$$M(y) = \int_0^y \mu(x) dx \quad (y \geq 0). \quad (3.7)$$

A kumulált halálozási intenzitás gyakorlati jelentőségét az adja, hogy segítségével könnyedén meghatározható a túlélési függvény a következő összefüggés alapján (Vékás [2011]):

$$G(y) = e^{-M(y)} \quad (y \geq 0). \quad (3.8)$$

**2. Példa.** Legyen  $\mu(y) = y$  ( $y \geq 0$ ). Ekkor a (3.7) egyenlet alapján

$$M(y) = \int_0^y \mu(x) dx = \int_0^y x dx = \frac{1}{2} y^2 \quad (y \geq 0),$$

továbbá a (3.8) összefüggés alapján

$$G(y) = e^{-M(y)} = e^{-\frac{1}{2} y^2} \quad (y \geq 0),$$

így a születéskor várható élettartam a (3.6) egyenlet és a sztenderd nor-

*mális eloszlás sűrűségfüggvényének tulajdonságai alapján*

$$e_0 = \int_0^\infty G(y)dy = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

### 3.2.2. A diszkrét modell és a halandósági tábla

Aktuáriusi alkalmazásokban kitüntetett jelentőségű az egész értékű élettartamokra épülő *halandósági tábla* (angolul *life table*), melynek konstruálásához szükséges a *koréves túlélési*, illetve *koréves halálozási valószínűségek* ismerete, amelyek egész életkorok esetén annak a valószínűségét adják meg, hogy egy adott életkort éppen betöltött egyén a soron következő születésnapját megéri, illetve már nem éri meg:

$$p_x = \mathbb{P}(L \geq x + 1 | L \geq x) \quad (x \in \mathbb{N}),$$

$$q_x = \mathbb{P}(L < x + 1 | L \geq x) \quad (x \in \mathbb{N}).$$

Nyilvánvalóan fennáll a következő azonosság:

$$p_x + q_x = 1 \quad (x \in \mathbb{N}), \tag{3.9}$$

illetve a koréves túlélési valószínűségek és a túlélési függvény egész életkorokban felvett értékei egymásból egyszerűen meghatározhatók:

$$p_x = \frac{G(x+1)}{G(x)} \quad (x \in \mathbb{N}, \quad G(x) > 0), \tag{3.10}$$

$$G(x) = \prod_{y=0}^{x-1} p_y \quad (x \in \mathbb{N}).$$

Az egészértékűség feltevése két okból is célszerű: egyrészt az emberi élettartamokról általában egész években mért adatok állnak csupán

rendelkezésre, másrészt integrálok helyett könnyebb véges összegekkel dolgozni a modellezés során.

Az egészértékű modell matematikai háttérének ismertetéséhez minde-  
nekelőtt célszerű az  $L$  élettartamot annak egész és tört részének össze-  
gére felbontani:

$$L = \lfloor L \rfloor + L_t,$$

ahol  $\lfloor L \rfloor$  az élettartam egész része,  $L_t$  pedig annak tört része. A koréves  
halálozási valószínűségek csak az élettartam egész részének eloszlását  
definiálják, így ebben a modellben a tört rész alakulásával kapcsolatban  
pótlólagos feltevessel szükséges élni (lásd a 3.2.3 szakaszban).

**Magyarország férfinépesességének halandósági táblája a 2013. évre**

$x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$e_x$
0	0,00589	100 000	589	72,01
1	0,00035	99 411	35	71,43
2	0,00020	99 376	20	70,46
3	0,00017	99 357	17	69,47
4	0,00010	99 340	10	68,48
5	0,00005	99 330	5	67,49
6	0,00006	99 324	6	66,49
7	0,00010	99 318	9	65,50
8	0,00012	99 308	12	64,50
9	0,00013	99 296	13	63,51
10	0,00012	99 283	12	62,52
11	0,00011	99 271	10	61,53
12	0,00009	99 260	9	60,53
13	0,00012	99 251	12	59,54
14	0,00023	99 239	23	58,55
15	0,00028	99 216	27	57,56
16	0,00032	99 188	32	56,58
17	0,00036	99 157	36	55,59
18	0,00041	99 121	41	54,61
19	0,00045	99 080	45	53,64
20	0,00049	99 035	49	52,66
21	0,00052	98 987	52	51,69
22	0,00055	98 935	54	50,71
23	0,00057	98 880	57	49,74
24	0,00059	98 824	59	48,77
25	0,00061	98 765	61	47,80
26	0,00063	98 704	62	46,83
27	0,00063	98 642	62	45,86
28	0,00063	98 580	62	44,88

3.2. ábra. A KSH 2013. évi férfi néphalandósági táblájának részlete  
(forrás: KSH NKI)

A halandósági táblák általában tartalmazznak egy olyan feltételezett  
 $\omega \in \mathbb{N}$  maximális életkort, amelyre  $\mathbb{P}(L > \omega) = 0$ . Magyarországon a  
KSH az  $\omega = 100$  év paramétert alkalmazza. A maximális életkor fel-

tevéseinek következménye, hogy az élettartam egész részének eloszlását meghatározzák a  $q_x$  ( $x = 0, 1, 2, \dots, \omega - 1$ ) valószínűségek a szokásos  $q_\omega = 1$  pótlólagos feltételezéssel együtt, amely biztosítja, hogy a modellben nulla az  $\omega$ -nál magasabb életkor megérésének valószínűsége.

A halandósági táblákban a  $p_x$  és  $q_x$  ( $x = 0, 1, 2, \dots, \omega - 1$ ) valószínűségeken kívül rendszerint szerepel még az

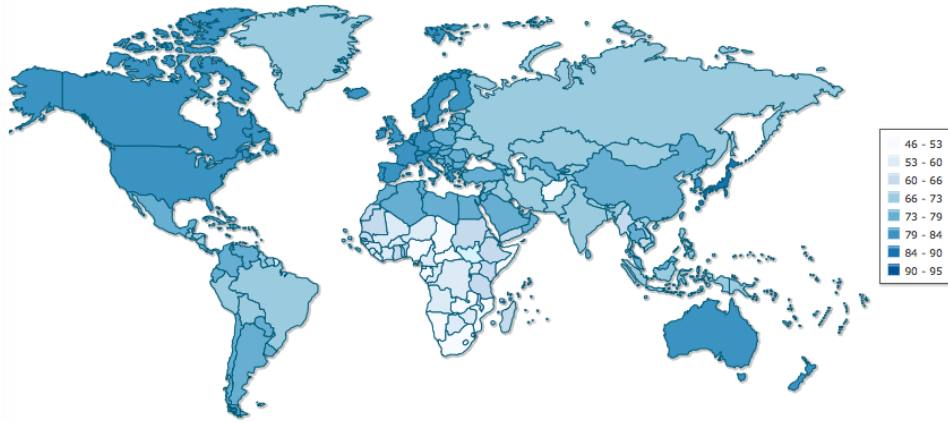
$$\begin{aligned} l_x &= l_0 G(x) \quad (x = 0, 1, 2, \dots, \omega), \\ d_x &= l_{x+1} - l_x \quad (x = 0, 1, 2, \dots, \omega - 1) \end{aligned}$$

*továbbélési és kihalási rend*, ahol  $l_0 = 100.000$  a halandósági tábla *alapszáma*. A továbbélési rend a túlélési függvény konstansszorozosa, és egy az alapszámmal megegyező létszámú – hipotetikus – újszülött populációban adja meg a legalább  $x$  éves kort elérő egyének várható számát, amellet az – igen súlyos – feltételezés mellett, hogy az idő múlásával a koréves túlélési valószínűségek változatlanok maradnak. A kihalási rend ugyenezen feltevés mellett az  $x$  éves korukban elhunyt egyének várható számát adja meg.

A halandósági táblákban szerepelnek még a következő képlet alapján kiszámított *várható hátralévő élettartamok*:

$$e_x = \frac{1}{l_x} \sum_{i=x+1}^{\omega} l_i + \frac{1}{2} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, \omega - 1), \quad (3.11)$$

melyekről könnyen belátható, hogy a (3.5) egyenletnek megfelelő mennyiségek, feltéve, hogy az élettartam tört részének várható értéke  $\mathbb{E}(L_t) = \frac{1}{2}$ , továbbá annak egész és tört részei függetlenek.



3.3. ábra. Születéskor várható élettartam években a világ országaiban 2014-ben (forrás: [www.indexmundi.com](http://www.indexmundi.com))

Illusztrációképpen a 3.2. ábrán a KSH 2013. évi férfi néphalandósági táblájának egy részlete látható, valamint a 3.3. ábra szemlélteti az években mért születéskor várható élettartam alakulását 2014-ben a világ országaiban.

### 3.2.3. A folytonos és a diszkrét modell kapcsolata

Az egészértékű modell könnyedén beágyazható a folytonos modellbe: a szükséges koréves túlélési valószínűségek a (3.10) összefüggés alapján meghatározhatók, szükség esetén egy  $\omega \in \mathbb{N}$  feltételezett maximális életkorral és a  $q_\omega = 1$  lezárással kiegészítve. Tehát a folytonos modell alapján is elkészíthető a halandósági tábla.

Fordított irányban a két modell kapcsolata már nem ilyen egyértelmű: az egészértékű modell nyilvánvalóan kevesebb információt hordoz a folytonos modellnél, mivel a túlélési függvényt csak egész életkorok esetén definiálja, nem specifikálva az élettartam tört részének eloszlását. Ebben az esetben – szükség esetén – két egész életkor között a túlélési függvényt a szomszédos egész értékek közötti interpolációval szokás de-



finiálni, így bizonyos értelemben a folytonos modell is beágyazható az egészértékű modellbe.<sup>2</sup> Az interpoláció mikéntjére többféle megoldás létezik a szakirodalomban. A túlélési függvény interpolációja általános alakban, az argumentumot annak  $x$  egész és  $v$  tört részére felbontva (Bowers és szerzőtársai [1997], 3.6. alfejezet):

$$\begin{aligned}\phi(G(x+v)) &= (1-v)\phi(G(x)) + v\phi(G(x+1)) \\ (x \in \mathbb{N}, G(x+1) > 0, 0 \leq v < 1),\end{aligned}$$

ahol a  $\phi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  szigorúan monoton *interpolációs függvény* általában a következők valamelyike:

- identitásfüggvény:  $\phi(s) = s$ ,
- logaritmusfüggvény:  $\phi(s) = \ln s$ ,
- reciprokfüggvény:  $\phi(s) = s^{-1}$ .

A fenti választások esetén ebben a sorrendben *lineáris*, *exponenciális* vagy *harmonikus interpolációról* beszélhetünk. E három eljárás esetén a  $G(x+v)$  és  $\mu(x+v)$  ( $x \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq v < 1$ ) interpolált túlélési és halálozási intenzitásfüggvényeket a 3.1. táblázat foglalja össze.

Eljárás	$\phi(s) =$	$G(x+v) =$	$\mu(x+v) =$
<b>Lineáris</b>	$s$	$(1-v)G(x) + vG(x+1)$	$\frac{q_x}{1-vq_x}$
<b>Exponenciális</b>	$\ln s$	$G(x)(p_x)^v$	$-\ln p_x$
<b>Harmonikus</b>	$s^{-1}$	$\frac{G(x)G(x+1)}{vG(x)+(1-v)G(x+1)}$	$\frac{q_x}{1-(1-v)q_x}$

3.1. táblázat. A legelterjedtebb interpolációs eljárások (forrás: saját szerkesztés Bowers és szerzőtársai [1997] alapján)

<sup>2</sup>Érdemes megjegyezni, hogy az itt bemutatott interpolációs módszerek például 5 év hosszúságú időszakra vonatkozó halandósági ráták évesítésére is alkalmazhatók.

A lineáris interpolációt ebben a kontextusban a halálesetek éven belüli egyenletes eloszlása hipotézisének is nevezik, mivel egyszerűen belátható, hogy alkalmazása egyenértékű azzal a feltételezéssel, hogy az élettartam tört része egyenletes eloszlású a  $(0, 1)$  intervallumon, valamint független annak egész részétől. Ebben az esetben a (3.5) és (3.11) egyenletek azonos eredményre vezetnek. Az eljárás szemléletessége ellenére az intuícióval ellentétes, hogy alkalmazása esetén a halálozási intenzitásfüggvény az egész életkoroknál található ugráspontokban nem feltétlenül monoton növekvő (lásd 3.1. táblázat).

Exponenciális interpoláció esetén a halálozási intenzitásfüggvény szakaszonként konstans (lépcsős) függvény (lásd 3.1. táblázat), amelyet ezért a konstans halálozási intenzitás hipotézisének is neveznek. Az intenzitásfüggvény monoton növekvő, ha a koréves halálozási valószínűségek sorozata is az.<sup>3</sup> Ekkor az exponenciális interpoláció az egyetlen olyan a bemutatott három megközelítés közül, amely – az intuíciónak megfelelően – garantáltan monoton növekvő halálozási intenzitásfüggvényt eredményez. Az eljárás további kedvező tulajdonsága a 3.1. táblázatban szereplő interpolált túlélési és halálozási intenzitásfüggvények egyszerűsége.

A hiperbolikus interpolációt a szakirodalom Balducci-hipotézis néven is ismeri. Használata az intuícióval és a tapasztalatokkal ellentétesen azt feltételezi, hogy egész életkorok között a halálozási intenzitásfüggvény monoton csökkenő (lásd 3.1. táblázat).

---

<sup>3</sup> Ez utóbbi feltevés általában csak igen alacsony életkorok esetén sérül, de ekkor empirikus tények alapján nem is várható el a halálozási intenzitásfüggvény monotonitása.

### 3.3. A halandósági tábla becslése

#### 3.3.1. Becslés diszkrét modellkeretben

Feltéve, hogy minden egyes  $x \in \{0, 1, \dots, \omega-1\}$  életkorra megfigyelhető  $E_x^0 \in \mathbb{N}_{>0}$  számú egyén túlélése az egyének  $x$ -edik születésnapját követő egy-egy évben, jelölje  $D_x \in \mathbb{N}$  az  $x$  éves életkorban megfigyelt halálozások számát, valamint  $\tilde{D}_x$  a megfelelő elméleti valószínűségi változót. Ekkor az egyéni élettartamok függetlenségét feltételezve ez utóbbiak független, binomiális eloszlású valószínűségi változók az alábbi paraméterekkel:

$$\tilde{D}_x \sim \text{Bin}(E_x^0, q_x) \quad (x = 0, 1, \dots, \omega-1). \quad (3.12)$$

Ezért a modell log-likelihood függvénye a következő alakban írható fel:

$$\ell(q_0, q_1, \dots, q_{\omega-1}) = \alpha + \sum_{x=0}^{\omega-1} \left( D_x \ln q_x + (E_x^0 - D_x) \ln(1 - q_x) \right), \quad (3.13)$$

ahol  $\alpha = \sum_{x=0}^{\omega-1} \ln \left( \frac{E_x^0}{D_x} \right)$  konstans. A (3.13) függvény a maximumát akkor veszi fel, ha a jobb oldalon szereplő összeg minden egyes tagja maximális. Elemi differenciálszámítással belátható, hogy ez a

$$\hat{q}_x = \frac{D_x}{E_x^0} = m_x^0 \quad (x = 0, 1, \dots, \omega-1) \quad (3.14)$$

értékek esetén teljesül, vagyis a fenti feltételezések mellett a  $q_x$  koréves halálozási valószínűségek maximum likelihood becslőfüggvényei a (3.4) egyenlet szerinti életkorfüggő kezdeti halandósági ráták.

### 3.3.2. Becslés folytonos modellkeretben

A diszkrét modellt a folytonos modellbe a 3.2.3. szakaszban ismertetett – legkedvezőbb tulajdonságokkal rendelkező – exponenciális interpoláció feltevése mellett beágyazva a modell log-likelihood függvénye a következő alakban írható fel (Ágoston–Kovács [2000], 53. oldal):

$$\ell(\mu(0), \mu(1), \dots, \mu(\omega - 1)) = \sum_{x=0}^{\omega-1} \left( D_x \ln \mu(x) - \mu(x) E_x^c \right). \quad (3.15)$$

A (3.15) függvény maximumhelyén a jobb oldalon szereplő összeg minden egyes tagja maximális, ami a

$$\hat{\mu}(x) = \frac{D_x}{E_x^c} = m_x^c \quad (x = 0, 1, \dots, \omega - 1) \quad (3.16)$$

választás esetén teljesül. Tehát ebben a modellkeretben a halálozási intenzitásfüggvény egész életkorokban felvett értékeinek maximum likelihood becslőfüggvényei a (3.4) összefüggés szerinti életkorfüggő központi halandósági ráták.

A 3.1. táblázat és a (3.9) összefüggés alapján exponenciális interpoláció esetén teljesül az alábbi összefüggés:

$$\mu(x) = -\ln(1 - q_x) \quad (x = 0, 1, \dots, \omega - 1), \quad (3.17)$$

így ebben a modellben a (3.16) és (3.17) egyenletek összevetéséből és a maximum likelihood becslőfüggvény függvénytranszformációval szembeni invarianciájából adódik a koréves halálozási valószínűségek maxi-

mum likelihood becslése:

$$\begin{aligned} -\ln(1 - \hat{q}_x) &= m_x^c, \\ \hat{q}_x &= 1 - e^{-m_x^c} \quad (x = 0, 1, \dots, \omega - 1). \end{aligned}$$

Ez a különböző kiinduló feltevések következtében eltér a (3.14) összefüggéstől, de a különbség a gyakorlatban jelentéktelen.

A továbbiakban koréves halálozási valószínűségek esetén a (3.14), halálozási intenzitásfüggvény esetén pedig a (3.16) összefüggést tekintem irányadónak.

### 3.3.3. A születésnapok és a naptári év kezdete közötti eltérés korrekciója

Fontos kitétel, hogy a (3.14) összefüggés feltételezi, hogy a megfigyelési időszak kezdete az egyének születésnapjára esik, így egyénenként különböző. Ezzel szemben a valóságban egy adott naptári évre vonatkozó halandósági tábla összeállításánál az adott év január elsején megfigyelt  $x$  éves egyének – ritka kivételektől eltekintve – nem aznap töltötték be az  $x$ -edik életévüket, így elképzelhető, hogy az adott naptári évben bekövetkező haláluk idején már  $x + 1$  évesek, illetve – ehhez hasonlóan – az év során  $x$  évesen elhunyt egyének jelentős része a naptári év kezdetekor még csak  $x - 1$  éves. Így ha  $E_x^0$  a *naptári év kezdetén*  $x$  éves egyének számát és  $D_x$  a *naptári év során*  $x$  évesen elhunyt egyének számát jelöli, akkor a (3.14) összefüggés már hibás eredményt ad, mivel a számlálóban figyelembe vett egyének egy része nem szerepel a nevezőben, és a nevezőben figyelembe vett, a naptári év során elhunyt egyének egy része nem szerepel a számlálóban.

A probléma megoldására a KSH az alábbi úgynevezett Böckh-formulát (Radnóti [2003]) alkalmazza, amely már figyelembe veszi és korrigálja a naptári év kezdete és az egyének születésnapjai közötti eltérést:

$$\begin{aligned} \hat{q}_0 &= 1 - \left(1 - \frac{D'_0}{B}\right) \left(1 - \frac{D''_0}{E_x^0}\right), \\ \hat{q}_x &= 1 - \left(1 - \frac{D'_x}{E_{x-1}^0 - D''_{x-1}}\right) \left(1 - \frac{D''_x}{E_x^0}\right) \quad (x = 1, 2, \dots, \omega - 1), \end{aligned} \quad (3.18)$$

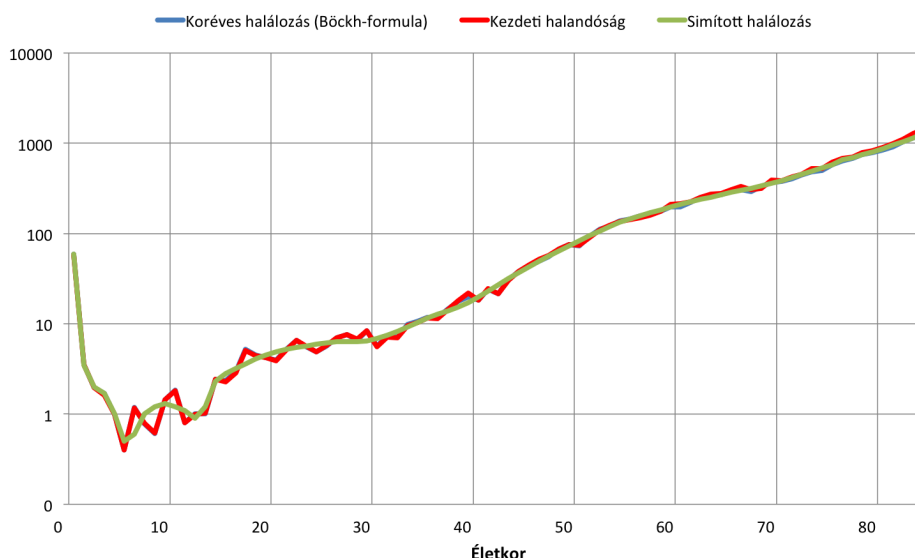
ahol  $B$  az adott naptári évre eső élveszületések száma, valamint  $D'_x$  és  $D''_x$  azon  $x$  évesen, az adott naptári év folyamán elhunyt egyének száma, akik  $x$ -edik születésnapjukat az adott, illetve a megelőző naptári évben töltötték be.<sup>4</sup>

A 3.4. ábra egy példán keresztül szemlélteti, hogy valódi hazai halandósági adatokon a (3.14) és (3.18) képletek eredményei még magas életkorok esetén sem különböznek egymástól számottevően: a koréves halálozási valószínűségek és a kezdeti halandósági ráták görbéi szabad szemmel megkülönböztethetetlenek egymástól.

### 3.3.4. Kiegyenlítő eljárások

Ahogy a 3.4. ábrán is látható, a (3.14) vagy (3.18) összefüggések alapján becsült koréves halálozási valószínűségek sorozata meglehetősen szabálytalan, véletlen ingadozást tartalmaz, amelyet az élet- és nyugdíjbiztosítási alkalmazásokat szem előtt tartva célszerű kiszűrni az adatokból. Az aktuáriusi szakirodalom ezt *kiegyenlítésnek* vagy *simításnak* (angolul *graduation* vagy *smoothing*) nevezi. Erre a célra féLPARAMÉTERES, paraméteres és nemparaméteres eljárások egyaránt alkalmazhatók.

<sup>4</sup> Nyilvánvalóan fennáll a  $D'_x + D''_x = D_x$  ( $x = 1, 2, \dots, \omega - 1$ ) azonosság.



3.4. ábra. Férfi koréves halálozási valószínűségek, kezdeti halandósági ráták és simított koréves halálozási valószínűségek (2013-ban, 0–84 évesekre, 10.000-rel szorozva, logaritmikus skálán, forrás: saját szerkesztés a KSH NKI adatai alapján)

A KSH a (3.18) összefüggés alapján becsült koréves halálozási valószínűségek simítására a következő félparaméteres eljárást alkalmazza (Ágoston [2003]): 0–3 éves életkorok esetén a becsült koréves halálozási valószínűségeket változatlanul hagyják, 4–14 éves életkorok között negyedfokú polinom illesztésével simítják azokat, 15–74 éves életkorok között a mozgóátlagoláshoz hasonló, mechanikus kiegyenlítésnek is nevezett Karup–King interpolációt alkalmazzák, 75–100 éves életkorok között pedig a Gompertz–Makeham törvényt (lásd a 3.2. táblázatban) illesztik a becsült adatokra. A 3.4 ábrán látható a KSH által alkalmazott simítás hatása a koréves halálozási valószínűségekre.

További lehetőség a paraméteres simító módszerek alkalmazása, vagyis paraméteres eloszlás illesztése a megfigyelt élettartamokra. Az ilyen eloszlásokat a szakirodalom *halandósági törvényekként* (angolul *mortality laws*) is ismeri. A paraméteres simítás leginkább abban az esetben

hasznos az aktuáriusi gyakorlatban, ha – például kisebb állománnyal rendelkező életbiztosítók vagy nyugdíjpénztárak esetén – a megfigyelt populációban túl kevés adat áll rendelkezésre a halandósági tábla megbízható becslésére. Ekkor a paraméteres eloszlás által meghatározott szabályszerűségek hivatottak kiegészíteni a hiányos halandósági tapasztalatokat. Az eloszlások paraméterei a közönséges és súlyozott legkisebb négyzetek módszerével és a maximum likelihood módszerrel egyaránt becsülhetők. Csupán illusztrációképpen, a teljesség igénye nélkül néhány nevezetes halandósági törvény paramétereit és  $\mu(y)$  ( $y \geq 0$ ) halálozási intenzitásfüggvényeit mutatja be a 3.2. táblázat.

Név	Paraméterek	Intenzitásfüggvény
<b>de Moivre</b>	$\omega > 0$	$(\omega - y)^{-1}$ ( $y < \omega$ )
<b>Gompertz</b>	$\alpha, \beta > 0$	$\alpha e^{\beta y}$
<b>Gompertz–Makeham</b>	$\alpha, \beta, \gamma > 0$	$\alpha e^{\beta y} + \gamma$
<b>Logisztikus</b>	$\alpha, \beta, \gamma > 0$	$\frac{\alpha e^{\beta y}}{1 + \alpha e^{\beta y}} + \gamma$
<b>Weibull</b>	$\alpha, \beta > 0$	$\alpha y^{\beta}$

3.2. táblázat. Néhány nevezetes halandósági törvény  
(forrás: saját szerkesztés)

A féLPARAMÉTERES és paraméteres módszereken kívül további lehetőség a nemparaméteres simító eljárások alkalmazása. Ilyenre példák a korábban említett Karup–King interpoláció, a mozgóátlagolás vagy a p-spline interpoláció (lásd például Currie és szerzőtársai [2004]).

### 3.3.5. Az illeszkedés vizsgálata

Ha minden  $x \in \Gamma \subseteq \{0, 1, \dots, \omega - 1\}$  életkorra rendelkezésre állnak ismert  $E_x^0 \in \mathbb{N}_{>0}$  kezdeti kitettségek és  $D_x \in \mathbb{N}$  haláleseti gyakoriságok, valamint a  $q_x$  koréves halálozási valószínűségekre vonatkozó  $\tilde{q}_x \in (0, 1)$  feltételezett értékek, akkor érdemes lehet megvizsgálni, hogy a tapaszt-



talt halálesi gyakoriságok származhatnak-e a feltételezett koréves halálzási valószínűségek által meghatározott eloszlásokból. A nullhipotézis ekkor:

$$H_0 : q_x = \tilde{q}_x \quad (x \in \Gamma). \quad (3.19)$$

Az egyes egyének egymástól független túlélését feltételezve a  $\tilde{D}_x$  életkorfüggő elméleti halálesi gyakoriságok független, binomiális eloszlású valószínűségi változók:

$$\tilde{D}_x \sim \text{Bin}(E_x^0, q_x) \quad (x \in \Gamma),$$

melyek eloszlásai elegendően nagy kezdeti kitettségek esetén a valószínűség számításban alapvető fontosságú de Moivre–Laplace tétel következtében normális eloszlással közelíthetők:

$$\tilde{D}_x \sim \mathcal{N}(E_x^0 q_x, E_x^0 q_x (1 - q_x)) \quad (x \in \Gamma). \quad (3.20)$$

A (3.20) összefüggés ekvivalens felírása sztenderdizálás segítségével:

$$\frac{\tilde{D}_x - E_x^0 q_x}{\sqrt{E_x^0 q_x (1 - q_x)}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (x \in \Gamma). \quad (3.21)$$

A (3.19) nullhipotézis fennállása esetén így – aszimptotikusan, elegendően nagy kezdeti kitettségeket feltételezve – a (3.21) összefüggés és az életkorfüggő elméleti halálesi gyakoriságok függetlensége következtében felírható a következő tesztstatisztika:

$$\chi^2 = \sum_{x \in \Gamma} \frac{(D_x - E_x^0 \tilde{q}_x)^2}{E_x^0 \tilde{q}_x (1 - \tilde{q}_x)} \sim \chi^2(\nu), \quad (3.22)$$

ahol  $\nu = \#\Gamma$  a vizsgált életkorok száma. Így az illeszkedésre vonatkozó (3.19) nullhipotézis az adott  $0 < \alpha < 1$  szignifikanciaszinten elutasítható, ha fennáll az alábbi reláció:

$$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(\nu),$$

ahol  $\chi^2_{1-\alpha}(\nu)$  a  $\nu$  szabadságfokú  $\chi^2$ -eloszlás  $1 - \alpha$  valószínűségi szinthez tartozó kvantilise.

Érdemes megjegyezni, hogy központi kitettségek ismerete esetén a (3.2) összefüggés felhasználásával számított kezdeti kitettségek alapján is felírható a (3.22) tesztstatisztika.

A halandósági táblák egyezésének vizsgálatára számos további eljárást és tesztstatisztikát mutat be például Benjamin–Pollard [1993] műve és Arató és szerzőtársai [2009] tanulmánya.



## II. rész

# A Lee–Carter modell és alkalmazása



## 4. fejezet

### A Lee–Carter modell elmélete

Ebben a fejezetben a halandóság-előrejelzésben mára mára klasszikussá vált Lee–Carter [1992] modell részletes matematikai hátterét ismertetem. A fejezetben az  $m_{xt}$  jelölés minden esetben az  $x \in \{1, 2, \dots, X\}$  korcsoport-hoz és  $t \in \{1, 2, \dots, T\}$  időszakhoz tartozó  $m^c$  központi halandósági rátákra vonatkozik majd: az egyszerűség kedvéért a  $c$  felső indexet elhagyom a halandósági ráták jelölésében. Az  $1, 2, \dots, T$  időszakok minden esetben egymást követő naptári éveket jelentenek majd.<sup>1</sup>

#### 4.1. A modell felírása

Lee–Carter [1992] modellje feltételezi, hogy minden  $x \in \{1, 2, \dots, X\}$  korcsoport-ra és  $t \in \{1, 2, \dots, T\}$  időszakra ismertek egy populáció  $m_{xt} > 0$  korcsoport- és időszakfüggő központi halandósági rátái, melyek alakulását a következő egyenlet írja le:

$$\ln m_{xt} = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{xt} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T), \quad (4.1)$$

---

<sup>1</sup> Bár egyéb azonos hosszúságú, egymást követő időszakokat is jelölhetnének.

ahol az  $X \geq 2$  és  $T \geq 2$  egész számok a vizsgált korcsoportok és időszakok számai.<sup>2</sup> A korcsoportokat többnyire korévenként, az időszakokat pedig általában naptári évenként szokás megadni.

A (4.1) egyenlet jobb oldalán szereplő  $a_x$  és  $b_x$ , valamint  $k_t$  értékek a halandóság alakulásának életkortól, illetve időszaktól függő paraméterei,  $\varepsilon_{xt}$  pedig a modell véletlen hibatagjait jelöli, melyekről általában szokás feltenni, hogy független, 0 várható értékű, azonos  $\sigma^2 > 0$  varianciájú, normális eloszlású valószínűségi változók:<sup>3</sup>

$$\varepsilon_{xt} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T).$$

Ekkor a különböző korcsoport-időszak kombinációkhoz tartozó logaritmikus halandósági ráták függetlenek, valamint teljesül rájuk a következő összefüggés:

$$\ln m_{xt} \sim \mathcal{N}(a_x + b_x k_t, \sigma^2) \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T). \quad (4.2)$$

A továbbiakban célszerű a (4.1) összefüggés jobb oldalán szereplő ismeretlen paramétereket a következő vektorokba foglalni:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_X \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_X \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_T \end{bmatrix}.$$

<sup>2</sup> A későbbiekben ismertetendő (4.23) feltétel alapján belátható, hogy az  $X = 1$  vagy  $T = 1$  értékek elfajuló megoldáshoz vezetnének. Az előrejelzésnek  $T = 1$  esetén amúgy sem lenne sok értelme.

<sup>3</sup> Bár Lee–Carter [1992] eredeti cikke a várható értéken és a variancián túl nem alkalmaz peremeloszlásbeli feltevést a hibatagokra, a normális eloszlás feltevésének előnye, hogy lehetővé teszi a szabatos maximum likelihood becslést, mely az eredeti cikkben leírttal azonos eredményre vezet.

Látható, hogy a hibatagok szórásával együtt a modell ismeretlen paramétereinek száma  $2X + T + 1$ , melyek a parszimónia elve jegyében kellően nagy  $X$  és  $T$  értékek esetén az ismert  $XT$  darab halandósági ráta tömör leírását szolgáltatják.

Identifikációs problémát okoz, hogy a (4.1) egyenletben szereplő paraméterek nem egyértelműek: könnyen belátható, hogy adott  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{k})$  paraméterek esetén az

$$(\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{k}}) = \left( \mathbf{a} + \alpha \mathbf{b}, \frac{1}{\beta} \mathbf{b}, \beta(\mathbf{k} - \alpha \mathbf{1}) \right) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0)$$

transzformált paraméterekre is fennáll a (4.1) összefüggés. A szabadságfokok megszüntetése érdekében Lee–Carter [1992] a következő pótlólagos paramétermegkötéseket javasolják:<sup>4</sup>

$$\sum_{x=1}^X b_x = \mathbf{1}^T \mathbf{b} = 1, \quad (4.3)$$

$$\sum_{t=1}^T k_t = \mathbf{1}^T \mathbf{k} = 0. \quad (4.4)$$

## 4.2. Interpretáció

A Lee–Carter modell paraméterei a következőképpen értelmezhetők:

- *Átlagos logaritmikus halandóság:* Az  $a_x$  ( $x = 1, 2, \dots, X$ ) paraméterek az átlagos logaritmikus halandósági ráták értékeit adják meg az egyes korcsoportokban (lásd később a (4.8) egyenletet), így a halandóság életkor szerinti tipikus alakulását jelenítik meg.

A KSH tábláiban szokásos korévenkénti, 0–100 év közötti felosztás esetén az értékeket az életkor függvényében ábrázolva a kapott

<sup>4</sup>  $\mathbf{1}^T = (1, 1, \dots, 1)$  a megfelelő dimenzióbeli összegzővektor.



görbe jellemzően egy viszonylag magas újszülöttkori értéket (csecsemőhalandóság) követően néhány éven belül eléri minimumát, majd közel lineárisan emelkedik, végül bizonyos esetekben kiugróan magas (például 95 év feletti) életkorokban kissé konkávva válik.

- *Mortalitási index:* A  $k_t$  ( $t = 1, 2, \dots, T$ ) sorozatot mortalitási indexnek szokás nevezni. Ez a (4.1) egyenlet egyetlen időtől függő komponense, mely így a halandóság időbeli változását testesíti meg a modellben. Általában csökkenő sorozat, de gyakran tartalmaz rövid növekvő szakaszokat (például háborúk idején vagy Magyarországon a rendszerváltozást követő néhány évben).
- *Életkorfüggő érzékenység:* A  $b_x$  ( $x = 1, 2, \dots, X$ ) együtthatók a logaritmikus halandósági ráták érzékenységét adják meg a mortalitási index változására nézve:

$$\mathbb{E}(\ln m_{x,t+1} - \ln m_{xt}) = b_x(k_{t+1} - k_t) \quad (t = 1, 2, \dots, T - 1),$$

vagyis ha a mortalitási index egy időegység alatt egységnyel nő/csökken, akkor az adott életkorbeli logaritmikus halandósági ráta várhatóan  $b_x$  egységgel nő/csökken, illetve a (nem logaritmikus) halandósági ráta az  $e^{b_x}$  tényezőszeresére változik. Időben csökkenő mortalitási index mellett a pozitív  $b_x$  paraméterrel rendelkező életkorokbeli halandóság csökken, a negatív életkorfüggő érzékenységű korcsoportok halandósága pedig a trenddel ellentétesen változik.

- *Átlagos négyzetes hiba:* A  $\sigma^2$  paraméter a megfigyelt logaritmikus halandósági ráták változékonyságát adja meg a korcsoport- és

időszakspecifikus szisztematikus becslés körül (lásd a (4.22) egyenletet). Alacsony értéke esetén a modell jól reprodukálja a tapasztalatokat.

A (4.1) egyenlet bal oldalán szereplő halandósági ráták logaritmikus transzformációját a következő két körülmény indokolja: egyrészt így nem fordulhat elő negatív becsült halandósági ráta a modellben, másrészt a varianciastabilizáló transzformáció mellett valósághűbb a homogén varianciára vonatkozó úgynevezett homoszkedaszticitási feltevés a (4.2) összefüggés jobb oldalán, hiszen míg a különböző korcsoportokhoz és életkorokhoz tartozó halandósági ráták nagyságrendekkel is eltérhetnek egymástól, addig a logaritmikus ráták közötti eltérések jóval kiszámíthatóbbak.

### 4.3. A paraméterek becslése

A (4.1) egyenlet paramétereinek itt bemutatott becslési eljárását Lee–Carter [1992] kissé heurisztikus gondolatmenettel indokolják, amely a maximum likelihood elv alapján tehető precízzé. Következzen tehát a paraméterbecslési eljárás ismertetése! A levezetés egyúttal elégséges feltételeket ad a megoldás létezésére és egyértelműségére.

#### 4.3.1. A modell log-likelihood függvénye

A paramétereket a  $\boldsymbol{\theta}^T = (\mathbf{a}^T, \mathbf{b}^T, \mathbf{k}^T, \sigma) \in \Theta = \mathbb{R}^{2X+T} \times \mathbb{R}_{>0}$  vektorba foglalva azok maximum likelihood becslése a (4.2) összefüggés alapján felírt log-likelihood függvény (4.3) és (4.4) feltételek melletti maxima-

lizálásával végezhető el:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \{\ell(\boldsymbol{\theta}) : \mathbf{1}^T \mathbf{b} = 1, \mathbf{1}^T \mathbf{k} = 0\}, \\ \ell(\boldsymbol{\theta}) &= \alpha - XT \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T (\ln m_{xt} - a_x - b_x k_t)^2, \end{aligned} \quad (4.5)$$

ahol  $\alpha = -\frac{1}{2}XT \ln(2\pi)$  konstans. A (4.5) feladat felírásából látható, hogy a  $\boldsymbol{\xi}^T = (\mathbf{a}^T, \mathbf{b}^T, \mathbf{k}^T) \in \Xi = \mathbb{R}^{2X+T}$  paramétervektor maximum likelihood becslését tetszőleges  $\sigma > 0$  esetén a feladat célfüggvényében szereplő eltérés-négyzetösszeg minimalizálása szolgáltatja:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\xi}} &= \arg \min_{\boldsymbol{\xi} \in \Xi} \{SSE(\boldsymbol{\xi}) : \mathbf{1}^T \mathbf{b} = 1, \mathbf{1}^T \mathbf{k} = 0\}, \\ SSE(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T (\ln m_{xt} - a_x - b_x k_t)^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

#### 4.3.2. Az eltérés-négyzetösszeg redukált alakja

Bár a (4.6) feladat jellegében hasonlít a klasszikus legkisebb négyzetek problémájához, megoldása nem végezhető a közönséges legkisebb négyzetek (OLS) módszerével, mivel a (4.1) összefüggésben egyedül a bal oldalon szerepelnek ismert mennyiségek.

Mivel a (4.6) feladat célfüggvénye folytonosan differenciálható, és az  $a_x$  paraméterekre nem vonatkoznak megkötések, ezért a feladat optimális megoldásában a hibanégyzetösszeg  $a_x$  paraméterek szerinti parciális deriváltjai nullával egyenlők:

$$\left. \frac{\partial SSE(\boldsymbol{\xi})}{\partial a_x} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\hat{\boldsymbol{\xi}}} = -2 \sum_{t=1}^T (\ln m_{xt} - \hat{a}_x - \hat{b}_x \hat{k}_t) = 0 \quad (x = 1, 2, \dots, X). \quad (4.7)$$

A (4.4) megkötésből és a (4.7) összefüggésből következik, hogy az  $a_x$  paraméterek maximum likelihood becslőfüggvényei minden egyes korcsoportban az ismert logaritmikus halandósági ráták átlagos értékeivel egyenlők:

$$\hat{a}_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln m_{xt} \quad (x = 1, 2, \dots, X). \quad (4.8)$$

A továbbiakban célszerű bevezetni az  $\tilde{m}_{xt}$  *centrált logaritmikus halandósági ráták* fogalmát, melyek definíciója:

$$\tilde{m}_{xt} = \ln m_{xt} - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln m_{xt} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T). \quad (4.9)$$

Az  $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}$  becsült paraméterérték (4.8) összefüggés szerinti behelyettesítésével a (4.6) feladat a következő redukált problémára egyszerűsödik, melynek megoldása a  $\boldsymbol{\psi}^T = (\mathbf{b}^T, \mathbf{k}^T) \in \Psi = \mathbb{R}^{X+T}$  vektor maximum likelihood becslőfüggvénye:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\psi}} &= \arg \min_{\boldsymbol{\psi} \in \Psi} \{SSE(\hat{\mathbf{a}}, \boldsymbol{\psi}) : \mathbf{1}^T \mathbf{b} = 1, \quad \mathbf{1}^T \mathbf{k} = 0\}, \\ SSE(\hat{\mathbf{a}}, \boldsymbol{\psi}) &= \sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T (\tilde{m}_{xt} - b_x k_t)^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

A centrált logaritmikus központi halandósági rátákat az

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \tilde{m}_{11} & \tilde{m}_{12} & \dots & \tilde{m}_{1T} \\ \tilde{m}_{21} & \tilde{m}_{22} & \dots & \tilde{m}_{2T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{m}_{X1} & \tilde{m}_{X2} & \dots & \tilde{m}_{XT} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

mátrixba rendezve, valamint az euklideszi norma általánosításaként tetszőleges  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times s}$  mátrixra bevezetve a

$$\|\mathbf{C}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s c_{ij}^2} \quad (4.12)$$

mátrixnormát<sup>5</sup>, a (4.10) feladat célfüggvénye a következő alakot ölti:

$$SSE(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{b}, \mathbf{k}) = \|\mathbf{M} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T\|_F^2. \quad (4.13)$$

A (4.10) minimalizálási feladat a (4.13) összefüggés alapján tehát az adott  $\mathbf{M}$  mátrix  $\mathbf{b}\mathbf{k}^T$  alakban történő legjobb közelítésével ekvivalens, ahol az optimalitás kritériuma az eltérés-négyzetösszeg minimalizálása, figyelembe véve a (4.3) és (4.4) paramétermegkötéseket. E feladat megoldásához szükség van két lineáris algebrai tételre: a *szingulárisérték-felbontásra* (ismertebb, angol nevén *Singular Value Decomposition* vagy röviden SVD), illetve az *Eckart–Young–Mirsky approximációs tételre*. Következzen tehát e tételek ismertetése!

### 4.3.3. A szingulárisérték-felbontás (SVD) és az Eckart–Young–Mirsky approximációs tétel

A szingulárisérték-felbontás a lineáris algebra egyik központi tétele:<sup>6</sup>

#### 1. Tétel. (Szingulárisérték-felbontás)

Tetszőleges  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{r \times s}$  mátrix felírható

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}^T$$

---

<sup>5</sup> A (4.12) normafogalom Frobenius-norma néven ismert.

<sup>6</sup> A tételt és bizonyítását lásd például Harville [1997] könyvének 556–565. oldalain.

alakban, ahol  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  és  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{s \times s}$  ortogonális mátrixok, valamint  $\mathbf{\Delta} \in \mathbb{R}^{r \times s}$  olyan diagonális mátrix, melynek főátlóbeli  $\delta_i$  elemei monoton csökkennek, a rang  $\mathbf{M}$ -edik értékig bezárólag pozitívak, azt követően pedig nullával egyenlők:

$$\begin{aligned} \delta_1 &\geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_{\text{rang } \mathbf{M}} > 0, \\ \delta_i &= 0 \quad (\text{rang } \mathbf{M} < i \leq \min\{r, s\}). \end{aligned}$$

A  $\delta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \min\{r, s\}$ ) számokat az  $\mathbf{M}$  mátrix szingulárisértékeinek, az  $\mathbf{U}$  és  $\mathbf{V}$  mátrixok  $\mathbf{u}_i$  és  $\mathbf{v}_i$  oszlopvektorait pedig az  $\mathbf{M}$  mátrix  $\delta_i$  szingulárisértékéhez tartozó bal és jobb oldali szingulárisvektorainak szokás nevezni.

Belátható, hogy a valamely adott szingulárisértékhez tartozó szingulárisvektorok nem egyértelműek: tetszőleges  $\delta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \min\{r, s\}$ ) szingulárisértékhez tartozó  $\mathbf{u}_i$  és  $\mathbf{v}_i$  bal és jobb oldali szingulárisvektorokra az  $\tilde{\mathbf{u}}_i = \frac{1}{\beta} \mathbf{u}_i$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}_i = \beta \mathbf{v}_i$  ( $\beta \in \mathbb{R}$ ) vektorok is ugyanazon szingulárisértékhez tartozó bal és jobb oldali szingulárisvektorok.

A szingulárisérték-felbontásnál közismertebb, azzal rokon módszer a szimmetrikus mátrixok spektrálfelbontása. Érdekes tehát megvizsgálni a két módszer közötti kapcsolatot. Az 1. tételben szereplő szingulárisérték-felbontás alapján az  $\mathbf{M}\mathbf{M}^T$  és  $\mathbf{M}^T\mathbf{M}$  (szimmetrikus) mátrixok a következő alakban állnak elő:

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}^T\mathbf{V}\mathbf{\Delta}^T\mathbf{U}^T = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{\Delta}^T\mathbf{U}^T, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{M}^T\mathbf{M} = \mathbf{V}\mathbf{\Delta}^T\mathbf{U}^T\mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}\mathbf{\Delta}^T\mathbf{\Delta}\mathbf{V}^T. \quad (4.15)$$

Mivel  $\mathbf{U}$  és  $\mathbf{V}$  ortogonális mátrixok, valamint  $\mathbf{\Delta}\mathbf{\Delta}^T$  és  $\mathbf{\Delta}^T\mathbf{\Delta}$  olyan

diagonális mátrixok, amelyek főátlóbeli pozitív elemei az  $\mathbf{M}$  mátrix pozitív szingulárisértékeinek négyzetei, ezért a (4.14) és (4.15) képletek az  $\mathbf{M}\mathbf{M}^T$  és  $\mathbf{M}^T\mathbf{M}$  mátrixok spektrálfelbontását adják. Belátható tehát, hogy ezen mátrixok pozitív sajátértékei megegyeznek az  $\mathbf{M}$  mátrix pozitív szingulárisértékeinek négyzeteivel, sajátvektoraik pedig megegyeznek  $\mathbf{M}$  bal illetve jobb oldali szingulárisvektoraival.

Az Eckart–Young–Mirsky tétel a mátrixok alacsonyabb rangú mátrixokkal történő közelítésének problémájára ad optimális megoldást.<sup>7</sup>

**2. Tétel.** (*Eckart–Young–Mirsky tétel*)

Tetszőleges  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{r \times s}$  mátrixra és  $\rho \in \{1, 2, \dots, \text{rang } \mathbf{M}\}$  értékre az

$$\hat{\mathbf{M}} = \arg \min_{\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times s}} \{ \|\mathbf{M} - \mathbf{C}\|_F^2 : \text{rang } \mathbf{C} \leq \rho \}$$

feladat optimális megoldása felírható a következő alakban:

$$\hat{\mathbf{M}} = \sum_{i=1}^{\rho} \delta_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T,$$

ahol  $\delta_i$  az  $\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}^T$  mátrix  $i$ -edik szingulárisértéke,  $\mathbf{u}_i$  és  $\mathbf{v}_i$  pedig annak  $i$ -edik bal és  $i$ -edik jobb oldali szingulárisvektora.

A 2. tétel alapján tehát  $\rho = 1$  esetén az  $\hat{\mathbf{M}} = \delta_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T$  alakú mátrixok biztosítják az  $\mathbf{M}$  mátrix legpontosabb egységnyi rangú közelítését.

#### 4.3.4. Az optimális megoldás

Mivel a  $\mathbf{b}\mathbf{k}^T$  alakú mátrixok egységnyi rangúak, sőt, bármely egységnyi rangú mátrix felírható ilyen formában, így az 1. és 2. tételek egyenes következménye, hogy a (4.13) összefüggésbeli eltérés-négyzetösszeget

<sup>7</sup> A tételt és bizonyítását lásd például Markovsky [2012] könyvének 86. oldalán.

minimalizálják az  $\mathbf{M}$  mátrix  $\mathbf{u}_1$  első bal és  $\mathbf{v}_1$  első jobb oldali szingulárisvektorainak következő formában felírt konstansszorosai ( $\beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$ ):

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{1}{\beta} \mathbf{u}_1, \quad (4.16)$$

$$\hat{\mathbf{k}} = \beta \delta_1 \mathbf{v}_1. \quad (4.17)$$

A  $\beta$  konstans megválasztásánál figyelembe kell venni a (4.3) és (4.4) paramétermegkötéseket. Jól látható, hogy a (4.3) megkötés teljesül, amennyiben a (4.16) egyenletben

$$\beta = \mathbf{1}^T \mathbf{u}_1 \neq 0 \quad (4.18)$$

az  $\mathbf{u}_1$  vektor koordinátáinak összege.<sup>8</sup>

Továbbá mivel a (4.9) és (4.11) összefüggésekből látható, hogy az  $\mathbf{M}$  mátrix sorainak összege nulla, ezért

$$\mathbf{M} \mathbf{1} = \mathbf{0}. \quad (4.19)$$

A (4.15) összefüggés alapján  $\mathbf{v}_1$  az  $\mathbf{M}^T \mathbf{M}$  mátrix  $\delta_1^2$  sajátértékhez tartozó sajátvektora, ezért a (4.19) egyenlet alapján

$$0 = (\mathbf{M} \mathbf{1})^T \mathbf{M} \mathbf{v}_1 = \mathbf{1}^T (\mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{v}_1) = \mathbf{1}^T \delta_1^2 \mathbf{v}_1 = \delta_1^2 \mathbf{1}^T \mathbf{v}_1,$$

vagyis a  $\mathbf{v}_1$  vektor koordinátáinak összege  $\mathbf{1}^T \mathbf{v}_1 = 0$ , így a (4.17) egyenlet miatt a (4.4) megkötés automatikusan teljesül.<sup>9</sup>

<sup>8</sup> Ha kivételesen  $\mathbf{1}^T \mathbf{u}_1 = 0$  adódik, akkor a (4.3) megkötés a  $\mathbf{b}^T \mathbf{b} = 1$  feltétellel helyettesíthető. Az új megkötés a (4.16) egyenlet alapján  $\beta = 1$  mellett teljesül, mivel ekkor  $\hat{\mathbf{b}}^T \hat{\mathbf{b}} = \frac{1}{\beta^2} \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 = 1$ , figyelembe véve, hogy  $\mathbf{U}$  ortogonális mátrix.

<sup>9</sup> Eltekintve a  $\delta_1 = 0$  elfajult esettől. A 1. tétel alapján ekkor  $\text{rang } \mathbf{M} = 0$ , vagyis  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ , és a (4.9) és (4.11) egyenletek következtében  $\ln m_{xt}$  bármely adott  $x \in \{1, 2, \dots, X\}$  korcsoportra konstans  $t$ -ben, tehát nincs mit modellezni.



A (4.10) feladat  $\hat{\psi}$  megoldásának egyértelműségéhez elégséges, ha

$$\delta_1 > \delta_2, \quad (4.20)$$

mivel ekkor a (4.14) és (4.15) mátrixok  $\delta_1^2$  sajátértékhez tartozó sajátalterei egydimenziósak.<sup>10</sup>

Mivel a (4.5) feladat célfüggvénye folytonosan differenciálható, és a  $\sigma$  paraméterre a  $\sigma > 0$  feltételtől eltekintve nem vonatkoznak megkötések, ezért a maximumhelyen  $\sigma$  szerinti parciális deriváltja nullával egyenlő:

$$\left. \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\frac{XT}{\hat{\sigma}} + \frac{1}{\hat{\sigma}^3} \sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T (\ln m_{xt} - \hat{a}_x - \hat{b}_x \hat{k}_t)^2 = 0, \quad (4.21)$$

így a (4.21) összefüggésből következik, hogy a hibatagok varianciájának maximum likelihood becslőfüggvénye a modell átlagos négyzetes hibája:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{XT} \sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T (\ln m_{xt} - \hat{a}_x - \hat{b}_x \hat{k}_t)^2 = \frac{SSE(\hat{\boldsymbol{\xi}})}{XT}. \quad (4.22)$$

Ha az  $\mathbf{M}$  mátrixra teljesül a

$$\text{rang } \mathbf{M} > 1 \quad (4.23)$$

feltétel, akkor a 2. tétel szerinti egységnyi rangú közelítés nem lehet tökéletes, így a (4.6) feladat célfüggvényére  $SSE(\hat{\boldsymbol{\xi}}) > 0$ , vagyis a (4.22) egyenlet alapján teljesül a  $\hat{\sigma} > 0$  feltétel.<sup>11</sup>

Könnyen ellenőrizhető, hogy a (4.5) feladat  $\ell(\boldsymbol{\theta})$  célfüggvénye  $\sigma$ -ban

---

<sup>10</sup> A vonatkozó tételt lásd például Harville [1997] könyvének 530. oldalán.

<sup>11</sup> A rang  $\mathbf{M} = 1$  speciális esetben  $SSE(\hat{\boldsymbol{\xi}}) = 0$ , vagyis az illesztett modell hiba nélkül leírja a logaritmikus halandósági ráták alakulását, így nincs szükség hibatagokra.

folytonos az  $\mathbb{R}_{>0}$  halmazon, valamint bármely adott  $SSE(\hat{\xi}) > 0$  mellett

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \ell(\hat{\xi}, \sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \ell(\hat{\xi}, \sigma) = -\infty,$$

így az  $\ell(\theta)$  függvény felveszi a maximumát a  $\Theta$  halmazon.

Mivel beláttuk, hogy  $SSE(\hat{\xi}) \leq SSE(\xi)$  ( $\xi \in \Xi$ ), továbbá a (4.5) feladat  $\ell(\theta)$  célfüggvénye kétszer folytonosan differenciálható, és némi számolással ellenőrizhető, hogy  $\hat{\sigma} > 0$  esetén fennáll a

$$\left. \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \sigma \partial \sigma} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = -2 \frac{XT}{\hat{\sigma}^2} < 0,$$

összefüggés, ezért a (4.22) egyenlet szerint választott  $\hat{\sigma}$  maximalizálja a log-likelihood függvényt. Tehát a (4.8), (4.16), (4.17), (4.18) és (4.22) egyenletek együttesen a  $\theta$  paraméter maximum likelihood becslését szolgáltatják.

Végezetül az itt ismertett eredmények alapján megállapítható az is, hogy a (4.18), (4.20) és (4.23) feltételek együttesen elégségesek a maximum likelihood becslőfüggvény létezéséhez és egyértelműségéhez.

## 4.4. A mortalitási index kiigazítása

Ha minden  $x \in \{1, 2, \dots, X\}$  korcsoportra és  $t \in \{1, 2, \dots, T\}$  időszakra ismertek a korcsoporttól és időszaktól függő  $E_{xt}^c > 0$  központi kitettségek és  $D_{xt} \in \mathbb{N}$  haláleteseti gyakoriságok, akkor Lee–Carter [1992] a mortalitási index tapasztalati adatokhoz történő kiigazítását javasolják. Az eljárás ezen lépését az a megfigyelés motiválja, hogy a Lee–Carter modell 4.3. alfejezetben bemutatott becslése egyenlő súllyal kezeli az egyes korcsoportokat, figyelmen kívül hagyva azok létszámait

és halálesi gyakoriságait, így a halálesetek számait pontosabban becsüli a fiatalabb, mint az idősebb életkorokban.

A kiigazított mortalitási indexet a

$$\hat{\mathbf{k}}^{(adj)} = \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^T : D_t = \sum_{x=1}^X D_{xt} = \sum_{x=1}^X E_{xt}^c e^{a_x + b_x k_t} \quad (t = 1, 2, \dots, T)\} \quad (4.24)$$

egyenletrendszer megoldása szolgáltatja. A kiigazítás alkalmazása esetén teljesül, hogy az egyes időszakokban megfigyelt halálesetek számai pontosan megegyeznek azok modellbeli várható értékeivel. Gyakorlati alkalmazásokban a (4.24) egyenletrendszer megoldását numerikus eljárásokkal szükséges előállítani.

Kíváncsi tulajdonságai ellenére a mortalitási index kiigazítása heurisztikus eljárásnak tekinthető, mely nem illeszkedik a 4.3. alfejezetben bemutatott, maximum likelihood elvre épülő becslési keretbe.

## 4.5. A kiigazított mortalitási index időbeli alakulása

A kiigazított mortalitási index idősorát Lee–Carter [1992] ARIMA folyamatnak (lásd például Asteriou–Hall [2015]) tekintik. Empirikus vizsgálataik igazolták, hogy az eltolásos véletlen bolyongás néven ismert eltolásos ARIMA(0, 1, 0) modellspecifikáció valós adatokon többnyire igen jó illeszkedést mutat. Az azóta publikált alkalmazások túlnyomó részében is ez a specifikáció szerepel.

### 4.5.1. A modell felírása

Az eltolásos véletlen bolyongás modellje alapján a kiigazított mortalitási index időbeli alakulása a következőképpen írható le:

$$\hat{k}_t^{(adj)} = \hat{k}_{t-1}^{(adj)} + s + \phi_t \quad (t = 2, 3, \dots, T), \quad (4.25)$$

ahol  $\hat{k}_1^{(adj)} \in \mathbb{R}$  adott kezdőérték, az  $s \in \mathbb{R}$  trendparaméter az eltolás mértéke,  $\phi_t$  pedig a folyamat véletlen hibatagjait jelöli, melyek független, 0 várható értékű, azonos  $\sigma_{RWD}^2 > 0$  varianciájú, normális eloszlású valószínűségi változók:

$$\phi_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{RWD}^2) \quad (t = 2, 3, \dots, T), \quad (4.26)$$

továbbá függetlenek a Lee–Carter modell (4.1) alapegyenletének  $\varepsilon_{xt}$  ( $x = 1, 2, \dots, X$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ ) hibatagjaitól is.

Tehát a kiigazított mortalitási index a Lee–Carter modellben a (4.25) egyenlet alapján az időben lineáris sztochasztikus trendfolyamatot követ, melynek növekményei függetlenek. A sztochasztikus trend merekségét megadó  $s$  trendparaméter jellemzően negatív a halandóság időbeli javulása miatt.

### 4.5.2. A paraméterek becslése

A (4.25) egyenletet átrendezve a (4.26) összefüggésből adódik, hogy a kiigazított mortalitási index idősorának elsőrendű differenciái független, azonos paraméterekkel rendelkező, normális eloszlású valószínűségi

változók:

$$\hat{k}_t^{(adj)} - \hat{k}_{t-1}^{(adj)} \sim \mathcal{N}(s, \sigma_{RWD}^2) \quad (t = 2, 3, \dots, T), \quad (4.27)$$

így közös eloszlásuk várható értékének és varianciájának maximum likelihood becslőfüggvényei a megfigyelt minta átlagával, illetve varianciájával egyenlők:

$$\begin{aligned} \hat{s} &= \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (\hat{k}_t^{(adj)} - \hat{k}_{t-1}^{(adj)}) = \frac{\hat{k}_T^{(adj)} - \hat{k}_1^{(adj)}}{T-1}, \\ \hat{\sigma}_{RWD}^2 &= \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (\hat{k}_t^{(adj)} - \hat{k}_{t-1}^{(adj)} - \hat{s})^2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

A (4.28) egyenlet alapján látható, hogy a kiigazított mortalitási index trendparamétere csak az első és utolsó megfigyelt értékektől függ, és az idősor kezdő és záró időszakok közötti átlagos megváltozásával egyenlő.

### 4.5.3. A trend szignifikanciája

A növekmények függetlensége és a (4.27) egyenlet szerint feltételezett normalitása miatt az eltolásos véletlen bolyongás trendparaméterére a következő konfidenciaintervallum írható fel:

$$\mathbb{P} \left( \hat{s} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-2) \frac{\hat{\sigma}_{RWD}}{\sqrt{T-1}} < s < \hat{s} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-2) \frac{\hat{\sigma}_{RWD}}{\sqrt{T-1}} \right) = 1 - \alpha, \quad (4.29)$$

ahol  $0 < \alpha < 1$  adott szignifikanciaszint,  $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-2)$  pedig a  $\nu = T-2$  szabadságfokú Student-eloszlás  $1 - \frac{\alpha}{2}$  valószínűségi szinthez tartozó kvantilise. Amennyiben a (4.29) konfidenciaintervallum tartalmazza

a nulla értéket, vagy ezzel ekvivalens módon, amennyiben a

$$TS = \frac{\hat{s}}{\hat{\sigma}_{RWD}} \sqrt{T-1}$$

tesztstatisztikára  $|TS| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-2)$  teljesül, úgy a

$$H_0 : \quad s = 0,$$

$$H_1 : \quad s \neq 0$$

hipotézispár<sup>12</sup> alkalmazása esetén az adatok alapján nem vethető el a  $H_0$  nullhipotézis, vagyis az  $s$  trendparaméter az adatok alapján nem különbözik szignifikánsan nullától.

A nullhipotézis – elegendően hosszú idősor esetén empirikus adatokon igen ritkán előforduló – elfogadása esetén a (4.25) egyenlet alapján a kiigazított mortalitási index várható értéke időben konstansnak tekinthető, és a (4.1) egyenlet alapján az időben változatlan, statikus életkorfüggő halandósági ráták alkalmazása elfogadható. Vagyis ebben a ritka esetben a Lee–Carter modell szerint valójában nincs szükség a halandósági ráták előrejelzésére, mivel azok a modell alapján legutolsó ismert,  $T$ -edik időszakbeli értékükkel jelezhetők előre.

## 4.6. Előrejelzés

A Lee–Carter modell eddig ismertetett lépéseinek célja a halandósági ráták múltbeli alakulásának minél pontosabb leírása a nyers adatoknál kevesebb paraméter segítségével, ami az időtől függő mortalitási index extrapolálása révén lehetőséget ad a halandósági ráták előrejelzésére.

---

<sup>12</sup> Természetesen a teszt egyoldali ellenhipotézis mellett is elvégezhető.

A mortalitási index jövőbeli értékeinek pontbecslései a már ismert értékeket adotttnak tekintve a (4.27) összefüggés extrapolálásával adódnak:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{k}_{T+j}^{(adj)}) &= \mathbb{E}\left(\hat{k}_T^{(adj)} + \sum_{i=1}^j (\hat{k}_{T+i}^{(adj)} - \hat{k}_{T+i-1}^{(adj)})\right) = \\ &= \hat{k}_T^{(adj)} + \sum_{i=1}^j \mathbb{E}(\hat{k}_{T+i}^{(adj)} - \hat{k}_{T+i-1}^{(adj)}) = \hat{k}_T^{(adj)} + js \quad (j = 1, 2, \dots).\end{aligned}$$

A maximum likelihood becslőfüggvény függvénytranszformációra vonatkozó invarianciája miatt a (4.28) egyenletben szereplő becsült trendparaméter behelyettesítésével nyerhető a jövőbeli mortalitási indexek várható értékének maximum likelihood becslőfüggvénye:<sup>13</sup>

$$\hat{\mathbb{E}}(\hat{k}_{T+j}^{(adj)}) = \hat{k}_T^{(adj)} + j\hat{s} \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (4.30)$$

Végül a (4.30) egyenletet a (4.1) összefüggésbe helyettesítve jelezhetők előre a központi logaritmikus halandósági ráták:

$$\ln \hat{m}_{x,T+j} = \hat{a}_x + \hat{b}_x(\hat{k}_T^{(adj)} + j\hat{s}) \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad j = 1, 2, \dots).$$

Az előrejelzési bizonytalanság a (4.25) egyenlet hibatagjainak Monte Carlo szimulációjával (Deák [1990]) modellezhető.<sup>14</sup>

<sup>13</sup> Lee–Miller [2001] cikkében szerepel az a pontosságot növelő, összetettebb javaslat, hogy ne csak a kiigazított mortalitási index, hanem egyenként minden egyes életkor logaritmikus központi halandósági rátái esetén az utolsó ismert értékek legyenek a projekciók kiindulópontjai.

<sup>14</sup> A bizonytalanság modellezését lásd valamivel részletesebben a 6.7.2. szakaszban.

## 5. fejezet

### Esettanulmány:

# A magyar nyugdíjrendszer fenntarthatóságáról

Jelen fejezet Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] tanulmányára épül. A bemutatott cikk a Lee–Carter [1992] modell segítségével jelzi előre a következő évtizedek statisztikai alapon várható demográfiai mutatóit, valamint bemutat egy a kapott eredmények felhasználásával felépített nyugdíjmodellt, melynek segítségével megvizsgálja a demográfiai folyamatok, a feltételezett makrogazdasági és nyugdíjpolitikai paraméterek, illetve egyes feltételezett gazdaságpolitikai intézkedések hatását a magyar állami nyugdíjrendszer fenntarthatóságára.

A felosztó-kirovó elven működő nyugdíjrendszer modellezése közgazdasági és statisztikai megközelítésben egyaránt végezhető. Számtalan tanulmány alkalmaz e célra mikro- és makroökonómiai megközelítéseket. Ezekre néhány példa: Simonovits [2003] a nyugdíjrendszerek kvantitatív modellezéséről szóló átfogó műve, Simonovits [2009] és Major–



Varga [2013] parametrikus nyugdíjreformokról szóló tanulmányai, továbbá Varga [2014] demográfiai átmenettel foglalkozó cikke. Az itt bemutatott tanulmány ezekkel szemben nem feltételez optimalizáló viselkedést és mögöttes hasznosságfüggvényeket, hanem aktuáriusi szemléletben pusztán a statisztikai módszerekkel elérhető legpontosabb előrejelzésre törekszik, a demográfiai folyamatokra és a nyugdíjrendszer működésére koncentrálva.

A módszertan mellett az egyes tanulmányok különbözhetnek aszerint is, hogy parametrikus reformok vagy szerkezeti változások hatását elemzik-e az adott modell segítségével. Az itt bemutatott tanulmány parametrikus változtatások hatását vizsgálja, míg a szerkezeti változásokat elemző tanulmányok sorába tartozik például Orbán–Palotai [2006] a tőkefedezeti pillér hatásairól írt cikke, amely a Magyar Nemzeti Bank nyugdíjmodelljével végzett szimulációk eredményeit mutatja be, illetve a Holtzer [2010] kötetben szereplő tanulmányok.

## 5.1. Demográfiai előrejelzés

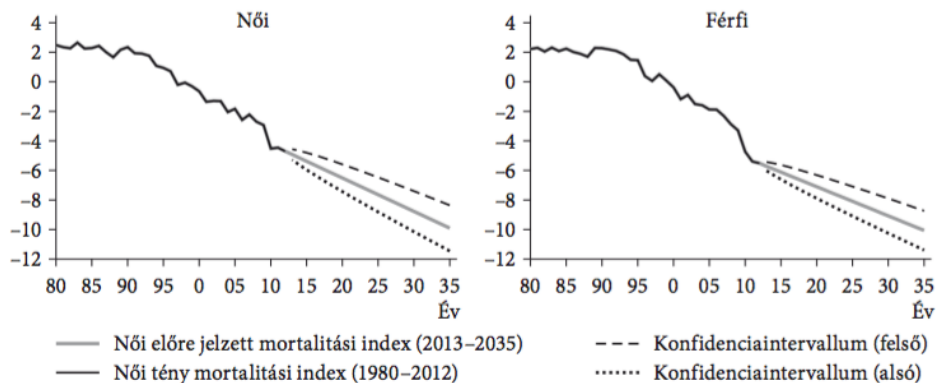
A Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] tanulmányában bemutatott halandósági és termékenységi modell célja a korévenként várható magyarországi férfi és női népesség alakulásának minél pontosabb előrejelzése. A folyamat főbb lépéseit az áttekinthetőség kedvéért szakaszokra bontva ismertetem.

### 5.1.1. A halandóság modellezése

A halandóság modellezésére a szerzők a KSH 1950–2012. naptári évekre vonatkozó, nemenkénti néphalandósági tábláiból nyert adatokat hasz-

nálták fel.<sup>1</sup> Az előrejelzés alapjául használt bázisidőszak kiválasztása érdekében először az 1960–2000, 1970–2000, 1980–2000 és 1989–2000 tanuló időszakok alapján felépített Lee–Carter modellek segítségével előre jelezték a 2001–2012 tesztelő időszakra vonatkozó, naptári évenkénti és nemenkénti néphalandósági táblákat, majd a 3.3.5. szakaszban bemutatott  $\chi^2$ -próba segítségével megvizsgálták a tényleges és az előre jelzett értékek egyezését. A halandósági táblák egyezésének tesztelését az 1–24 éves korosztályon végezték, mivel várhatóan ez a generáció fogja meghatározni a nyugdíjrendszert a későbbiekben vizsgált periódusban. A teszt eredményei alapján az 1980–2012 közötti időszakot választották bázisidőszaknak, melynek alapján a modell paramétereit becsülték. A szerzők a nemenkénti mortalitási indexek idősoraira ARI-MA folyamatokat illesztettek, és a Box–Jenkins módszertan alapján az ARIMA(1, 1, 1) specifikációk mellett döntöttek.

A mortalitási indexek múltbeli, számított és jövőbeli, előre jelzett értékeit az 5.1. ábra szemlélteti.

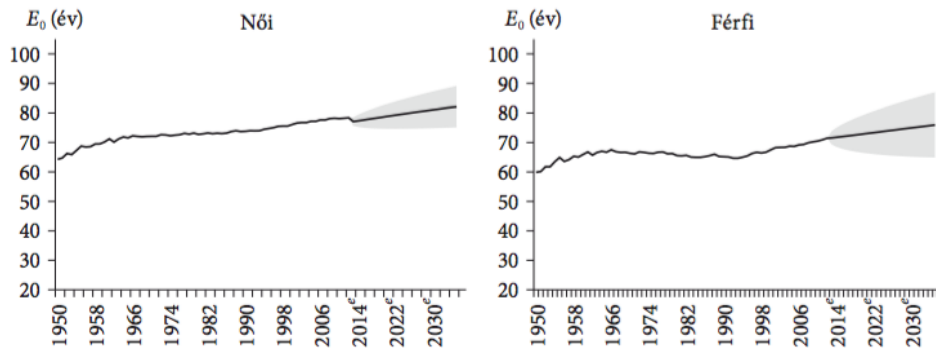


5.1. ábra. Becsült és előre jelzett  $k_t$  mortalitási indexek  
(1980–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

<sup>1</sup> Az 1950–2009. évi adatok közvetlen forrása a Human Mortality Database adatbázis (University of California, Berkeley & Max Planck Institute for Demographic Research, Rostock, [www.mortality.org](http://www.mortality.org), letöltés dátuma: 2016.08.19.).

Az ábra arról árulkodik, hogy Magyarországon a vizsgált időszakban a halandóság trendje igen változékonyan alakult, sőt, volt olyan időszak is – főként az 1990-es elején –, amikor általánosan növekedett a halandóság. A nők esetében a romlás mértéke kisebb volt, s a javulás üteme gyorsnak mondható, összevetve a férfi halandóság dinamikájával, ahol a javulás a romlás mértékével arányosan lassabb ütemű.

Az 5.2. ábra a nemenkénti születéskor várható élettartamok múltban megfigyelt és jövőre vonatkozó, előre vetített értékeit szemlélteti:



5.2. ábra. Múltbeli és előre jelzett születéskor várható élettartamok (1950–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

A 2035. évre előre jelzett értékek: nők esetén 82,1 év, férfiak esetén pedig 76,0 év, a KSH 2014. évi néphalandósági tábláiban szereplő 78,9, illetve 72,1 évvel szemben.

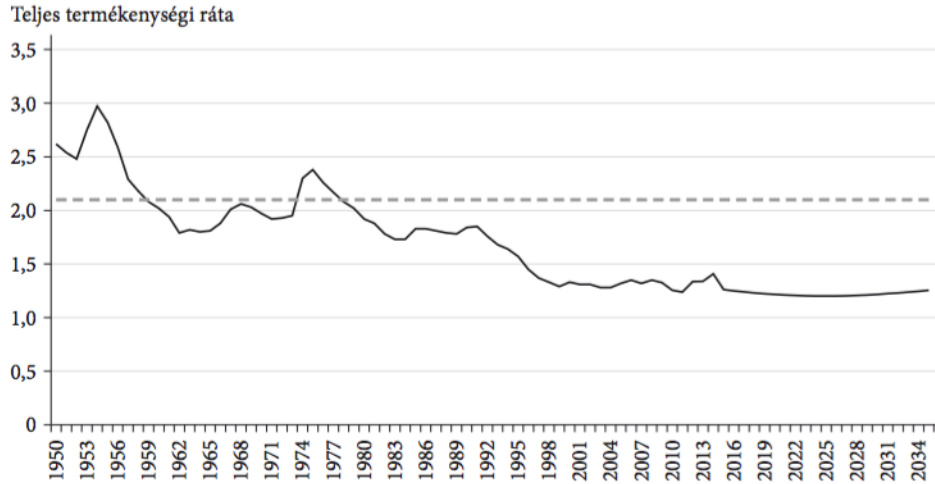
### 5.1.2. A termékenység modellezése

A termékenységi arányszám a halandósággal együtt nagyban meghatározza az állami nyugdíjrendszer jövőbeli fenntarthatóságát. Az úgynevezett *teljes termékenységi ráta* az egy nőre a teljes élethossza során jutó gyermekek várható számát adja meg, feltéve, hogy a gyermekszülés életkor-specifikus valószínűségei időben változatlanok. A mutató

képlete (Berde–Németh [2015a] és [2015b]):

$$TTR = \sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} f_x,$$

ahol  $x_{min}$  és  $x_{max}$  a feltételezett legalacsonyabb és legmagasabb szülési életkorok, az  $f_x$  ( $x = x_{min}, x_{min} + 1, \dots, x_{max}$ ) értékek pedig az életkor-specifikus termékenységi ráták. A teljes termékenységi ráta kritikus értéke (Espenshade és szerzőtársai [2003]) fejlett országokban 2,1 körül alakul: ha ezen érték alá esik a ráta értéke, akkor a vizsgált népesség létszáma általában csökkenő trendet követ.<sup>2</sup>

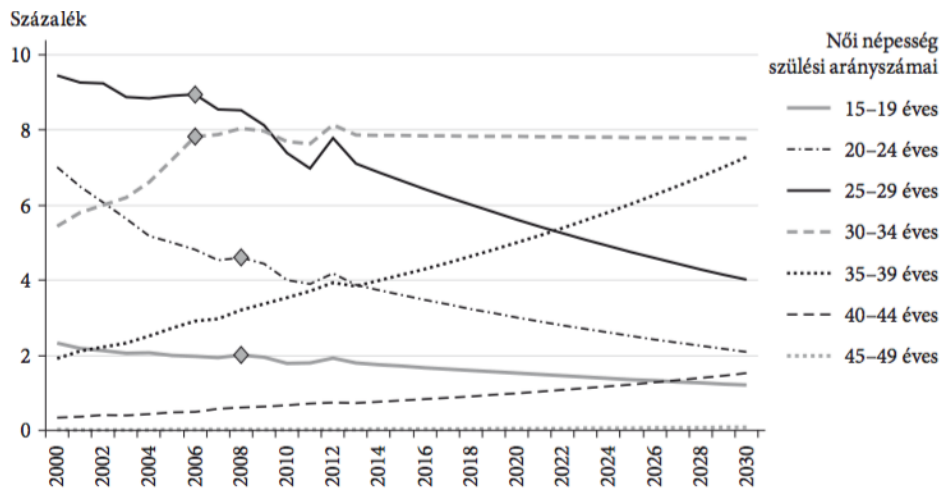


5.3. ábra. A teljes termékenységi ráta múltbeli és előre jelzett értékei (1950–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

Az 5.3. ábra mutatja be a magyarországi teljes termékenységi ráta múltbeli és jövőben várható alakulását. Az ábra alapján a vizsgált időszakban egyértelmű negatív trend jellemezte a magyar népesség ter-

<sup>2</sup> Ennek heurisztikus indoklása: mivel a férfiak és nők létszáma közel azonos, ezért egy nőnek átlagosan körül-belül két, saját anyaságát vagy apaságát megérő gyermeket kell szülnie ahhoz, hogy a népesség létszáma egyensúlyban legyen. Mivel nem minden gyermek éri meg ezt a kort, ezért valamivel két gyermek felett húzódik a kritikus érték. Magas gyermekhalandósággal rendelkező, fejlődő országokban a kritikus érték a 3,5 gyermeket is elérheti (Espenshade és szerzőtársai [2003]).

mékenységét, leszámítva az úgynevezett Ratkó-korszakot, amikor az abortusztilalom miatt növekedett a termékenység értéke, valamint az úgynevezett Ratkó-visszhangot (a Ratkó-unokák megszületését) és az azzal egybeeső újabb abortuszszigorítás időszakát. Ezt a két kiugrást leszámítva azonban a teljes termékenységi ráta folyamatosan csökkent. Értéke 1978 óta folyamatosan az elméleti egyensúlyi ráta alatt volt, és az 1,3-as szint körül ingadozik az elmúlt kicsivel több mint tíz évben. A születések számát a szerzők Hyndman [2007] nyomán a – halandóság előrejelzésére szintén alkalmazott – Lee–Carter modell segítségével jelezték előre a KSH 2000–2012. évi korcsoportos női termékenységi adatai alapján.<sup>3</sup> A projekcióhoz szükséges bázisidőszakot minden korcsoportra egyedileg határozták meg, hogy az utóbbi években esetlegesen kibontakozó új trendet nagyobb súllyal vehessék figyelembe.



5.4. ábra. A korcsoportos termékenységi ráta múltbeli és előre jelzett értékei (2000–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

Az 5.4. ábrán<sup>4</sup> jól látszik, hogy a vizsgált időszakban a szülések idő-

<sup>3</sup> Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] cikkével szemben a termékenységet endogénnek tekinti például Simonovits [2014] tanulmánya.

<sup>4</sup> Az ábrán látható kis négyzetek adnak további információt a projekció során választott bázisidőszakok kezdőpontjairól. Ahol ez nincs külön jelölve, ott a 2000. év a bázisidőszak kezdőpontja.

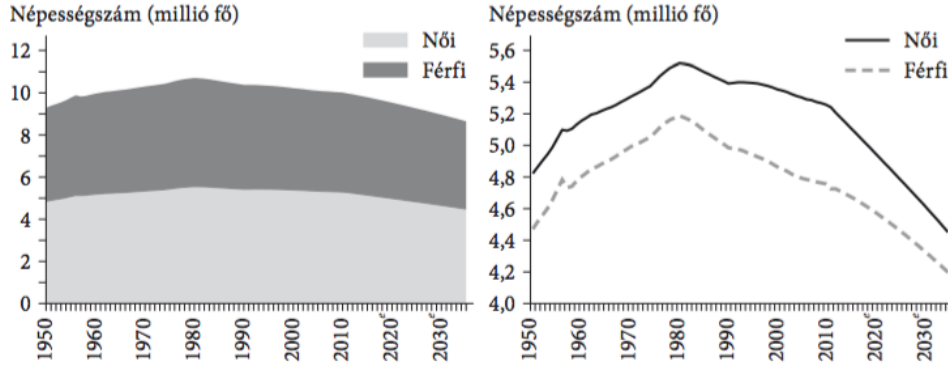
pontja jellemzően a magasabb életkorok felé tolódott. A születésszámok előrejelzése során a szerzők azzal a további, a KSH adatai alapján alátámasztott feltételezéssel éltek, hogy a születendő gyermekek 55%-a lesz fiú a jövőben.

Érdemes megjegyezni, hogy a szerzők a halandóság és a termékenység alakulását független folyamatokként modellezték. Más választásuk nem is lett volna egyrészt a becslési bázisidőszakok különbözősége, másrészt a két folyamat esetén alkalmazott eltérő korcsoportos felosztás miatt. A valóságban természetesen nem feltétlenül helytálló a függetlenség feltételezése, hiszen a két folyamatnak közös külső mozgatórugói (például jövedelem és egészségügyi helyzet) állhatnak a változások hátterében. A korreláció figyelembe vétele ígéretes jövőbeli kutatási irány lehet.

### 5.1.3. Lakosságszám és időskori függőségi ráta

A szerzők az előző két szakaszban ismertetett halandósági és termékenységi előrejelzések alapján egyszerű rekurzióval számították ki a népességszám várható alakulását. Az 5.5 ábrán látható előrejelzés alapján 2035-ben várhatóan 8 647 505 fős lakossággal lehet számolni, amelynek 51,5 százaléka, azaz 4 450 507 fő lesz nő, míg a fennmaradó 4 196 998 fő lesz a férfiak létszáma. Fontos megjegyezni, hogy ezek az eredmények nem veszik figyelembe a migráció hatását.

A populáció létszámának meghatározása mellett a felosztó-kirovó nyugdíjrendszerek finanszírozhatósága szempontjából lényeges mutató az *időskori függőségi ráta*, amely a nyugdíjas korú (65 éves vagy annál idősebb) és az elméletileg aktív korú (19–64 éves) népesség létszámai-



5.5. ábra. A népességszám múltbeli és előre jelzett értékei nemenként (1950–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

nak egymáshoz viszonyított arányát adja meg. A mutató képlete:

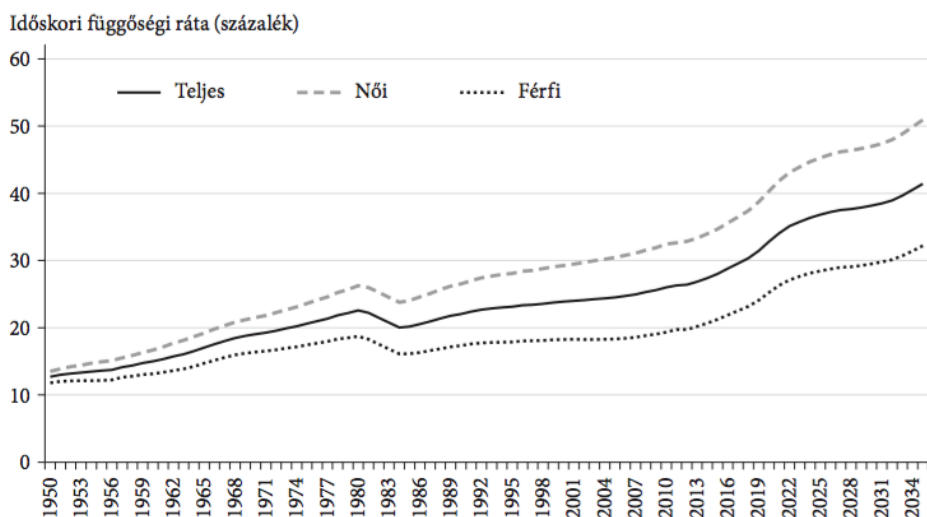
$$IFR = \frac{\sum_{x=65}^{\omega} E_x^0}{\sum_{x=19}^{64} E_x^0}.$$

Az 5.6. ábra alapján megállapítható, hogy az időskori függőségi ráta gyorsuló ütemben emelkedik, így egy aktív egyénre (járulékfizetőre) mind több passzív (nyugdíjas) jut, ami komoly kihívást jelent a felosztó-kirovó elven működő állami nyugdíjrendszer fenntarthatóságára nézve.<sup>5</sup>

## 5.2. A bevételek és kiadások modellezése

A korábbiakban bemutatott demográfiai modell eredményeinek felhasználásával Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] egy kohorszalapú nyugdíjmodellt építettek fel a Nyugdíjbiztosítási Alap várható bevételeinek és kiadásainak előrejelzésére. A modell célja a fenntarthatóság elemzése, illetve az exogén paraméterek – például reálbér-emelkedés, foglalkozta-

<sup>5</sup> A teljes termékenységi rátával ellentétben az időskori függőségi rátának nincs elméleti egyensúlyi szintje, mivel a nyugdíjrendszer számos paramétere befolyásolja a mutató pénzügyi egyensúlyt biztosító értékét.

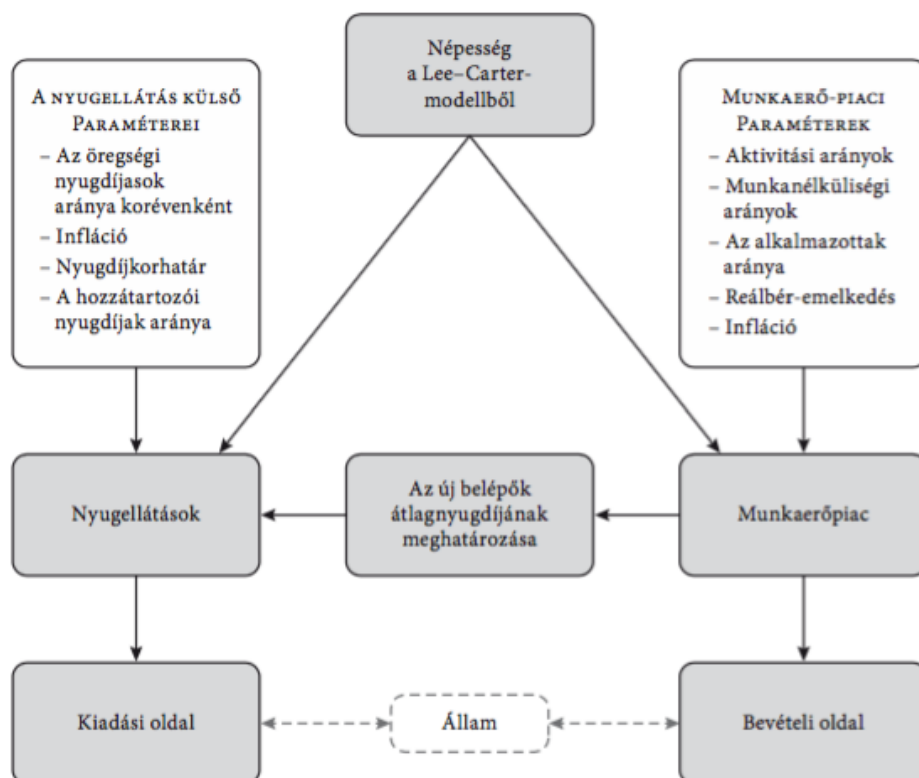


5.6. ábra. Az időskori függőségi ráta múltbeli és előre jelzett értékei (1950–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

tottsági arány, nyugdíjkorhatár – hatásának vizsgálata. A kohorszalapú megközelítés választásának oka, hogy – az egyénekre épülő mikroszimuláció, illetve a pusztán aggregátumokat felhasználó makromodellek között félúton – ez a legegyszerűbb olyan modelltípus, amelybe beépíthetők a demográfiai előrejelzés eredményei. A nyugdíjmodell szerkezetét az 5.7. ábra szemlélteti.

A járulékbevételek modellezése érdekében szükség volt az egyes kohorszokban a foglalkoztatottak létszámának előrejelzésére. Ehhez a szerzők minden kohorsz esetében kiszámították a nem és korcsoport szerinti aktivitási és munkanélküliségi rátákat, majd a foglalkoztatottakat alkalmazotti és egyéb jogviszonyban (például vállalkozói tevékenység, rövid idejű alkalmi munkavégzés stb.) állókra bontották ketté. Erre a felbontásra azért volt szükség, mert a bruttó átlagkereseti adatok közvetlenül csak az alkalmazásban állókra érhetők el. Az egyéb jogviszonyban állók (a foglalkoztatottak körülbelül 30 százaléka) átlagos bruttó jövedelmére (pontosabban járulékalapjára) csak a nyugdíjassza elmúlt évekbeli





5.7. ábra. A nyugdíjmodell felépítése  
(forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

járulékbevételeiből lehetett következtetni. Végül a várható éves átlagos bruttó jövedelmek segítségével kiszámították az egyes évek során kifizetett teljes bruttó bértömeg értékét, amelyre a nyugdíjassza bevételeinek meghatározása épül.

A nyugdíjrendszer bevételeinek két fő forrása a munkaadó által befizetett szociális hozzájárulási adónak (27 százalék) a központi költségvetésről szóló törvényben (Országgyűlés [2014]) meghatározott része (jelenleg 85,46 százaléka), valamint a munkavállaló által fizetett nyugdíjjárulék (10 százalék). Ez a kettő együtt adja a nyugdíjrendszer összes bevételeinek több mint 90 százalékát. A nyugdíjassza bevételeinek előrejelzése során a szerzők figyelembe vették, hogy az elmúlt években az egyéni nyugdíjjárulékokból érkező bevételek a szociális hozzájárulási

adóból befolyt összeghez viszonyított aránya rendre nagyobb volt a törvényben meghatározott százalékos mértékek alapján várható aránynál, melynek hátterében feltehetően a szociális hozzájárulási adóból a munkaadók által igénybe vehető kedvezmények állnak. Az elmúlt három év adatai alapján Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] feltételezték, hogy e kedvezmények a szociális hozzájárulási adóból befolyt bevételeket 8 százalékkal csökkentik.

*A szerzők a nyugdíjrendszer további bevételeinek (például késedelmi pótlékok, bírságok, költségvetési hozzájárulások) modellezésétől eltekintettek, mivel azok mértéke – a modellben nem szereplő okokból – az elmúlt időszakban évről évre jelentősen ingadozott.*

Az 5.7 ábrán látható, hogy a modellben a munkaerőpiaci előrejelzést az új belépők átlagos nyugdíjának meghatározása követi a nyugellátások kiszámítása érdekében. A modellben az átlagos nyugdíj értéke férfiakra és nőkre egy olyan személy öregségi nyugdíjának felel meg, aki a nyugdíjkorhatár betöltésekor a nemének megfelelő átlagos szolgálati idővel rendelkezik, és életpályája során keresete végig átlagos volt, figyelembe véve az átlagos szolgálati idő 2022-ig várható emelkedését is a folyamatosan emelkedő nyugdíjkorhatár miatt.<sup>6</sup> A modell az életkoronkénti és nemenkénti átlagos nyugdíjakat évente a tárgyévre feltételezett infláció mértékével indexálja.

Tapasztalati adatok alapján a nyugdíjkorhatárt újonnan elérő férfiak 99 százaléka és a nők 97 százaléka jogosult a modellben öregségi nyugdíjra, míg a már korábban nyugdíjazott kohorszokban a szerzők a tényleges arányok figyelembe vételével állapították meg a nyugdíjasok létszámát, illetve a nőknek 40 év jogosultsági idő után, életkortól függetlenül já-

---

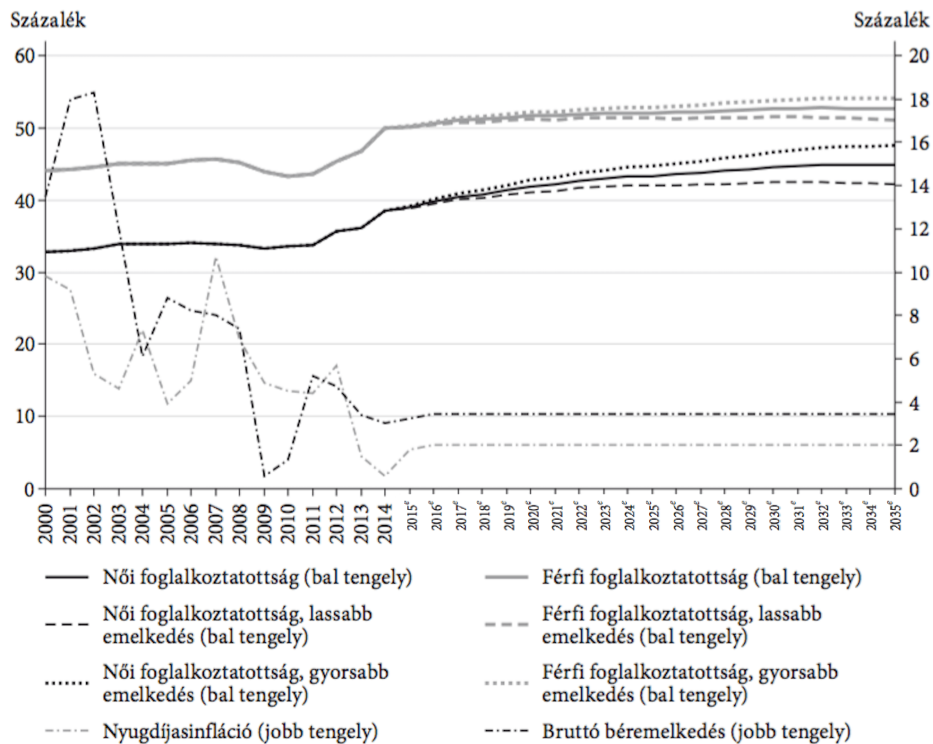
<sup>6</sup> Tapasztalati adatok hiányában az átlagos szolgálati idő feltételezett növekménye a korhatáremelés 60 százaléka (az aktivitási ráta alapján).

ró öregségi nyugdíjat igénybe vevők arányát és ezen ellátások átlagos szintjét a tapasztalati értékek kivetítése alapján közelítették.

A modell utolsó lépése a Nyugdíjbiztosítási Alap kiadási oldalának meghatározása. Ezek a kiadások az öregségi, valamint a hozzátartozói nyugdíjakból és egyéb költségekből (például méltányossági kifizetések) állnak. A szerzők a hozzátartozói nyugdíjakról azt feltételezték, hogy azok öregségi nyugdíjakhoz viszonyított aránya állandó.

### 5.3. Gazdasági feltételezések

A modell szempontjából releváns makrogazdasági mutatók Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] által feltételezett alakulása az 5.8. ábrán látható. A foglalkoztatás előrejelzése érdekében a szerzők a korcso-



5.8. ábra. Az alkalmazott makrogazdasági feltételezések (forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

portos aktivitási, valamint munkanélküliségi ráták 1998–2014 közötti értékeire illesztettek logaritmikus vagy hatvány típusú trendvonalakat. Az előrejelzés alapján az aktivitási ráta a legfiatalabb (15–19 éves) korosztály esetében csökken, a 25–29 éves férfiak, valamint a legidősebb (65 feletti) korosztályok esetén stagnál, a többi korosztály esetén pedig folyamatosan emelkedik az időszak végéig. A leírt korcsoportos trendekkel összhangban az 5.8. ábrán látható, hogy a férfiak esetén enyhén, a nők esetén pedig erősebben emelkedik a foglalkoztatottsági ráta, amely az időszak végére várhatóan a nők esetében 6,2 százalékponttal, a férfiak esetében pedig 2,7 százalékponttal lesz magasabb, mint 2014-ben volt.

A nyugdíjak indexálásához használt nyugdíjasok fogyasztói árindexére a szerzők a már ismert évekre a tényadatokat alkalmazták, 2016-tól pedig a jelenleginél magasabb, 2 százalékos szinten állandósuló árszínvonal-emelkedést tételeztek fel. Ehhez az inflációs szinthez képest 2015-től kezdve 1,43 százalékos állandó reálbér-emelkedéssel számoltak az 1992–2014 közti nettó reálbér-emelkedés átlagos üteme alapján.

Az itt bemutatott alapfeltételezések mellett a szerzők a következő alternatív forgatókönyvek hatásait is megvizsgálták:

- az alaphelyzethez képest éves szinten 0,5 százalékponttal alacsonyabb, illetve magasabb átlagos reálbér-emelkedés;
- az alaphelyzethez képest a foglalkoztatási arányok intenzívebb, illetve alacsonyabb ütemű javulása (lásd az 5.8. ábrán);
- a nyugdíjkorhatár 2022 utáni további emelése, úgy, hogy az ne változtasson a nyugdíjkorhatár betöltésekor várható átlagos hátralévő

élettartamon.<sup>7</sup>

## 5.4. A modell validációja

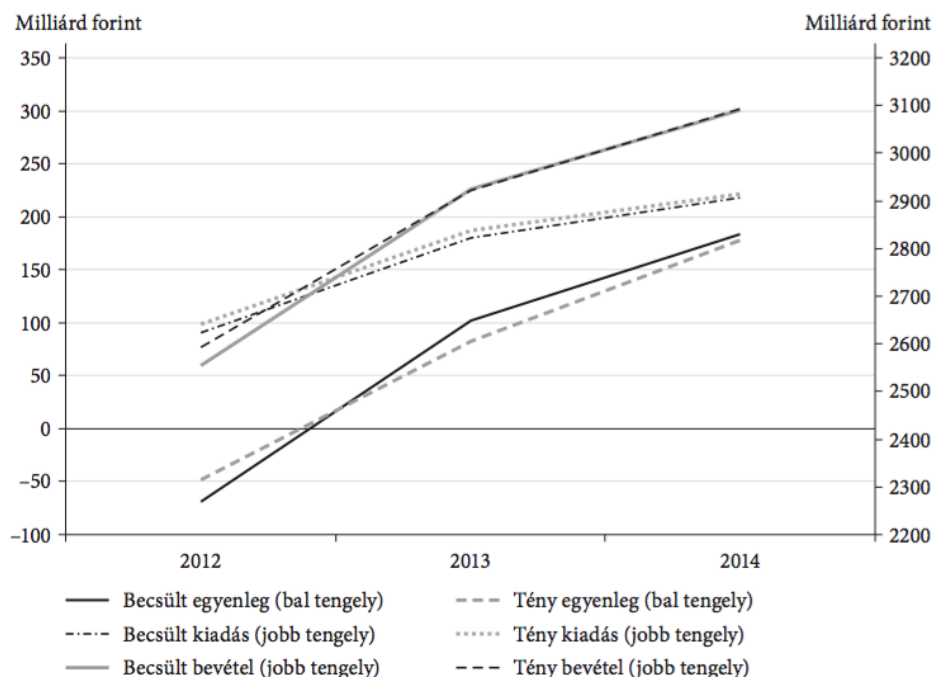
A modell validációja érdekében Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] a modell segítségével, a megelőző évek adatai alapján előre jelezték a 2012–2014. évek bevételi, kiadási és egyenlegadatait, melyeket összehasonlítottak az ONYF tényadataival. Az 5.9. ábrán látható, hogy mind a bevételek, mind a kiadások becsült értékei igen közel állnak a valós adatokhoz. A legnagyobb eltérés sem haladja meg az adott tényadat 1,5 százalékát. Az egyenleg esetében jelentősebbnek tűnő eltérést az okozza, hogy a nyugdíjrendszer egyenlege legalább egy nagyságrenddel kisebb a bevételeknél/kiadásoknál.

## 5.5. Eredmények és javaslatok

Az 5.3. alfejezetben bemutatott alapfeltételezések mellett, 2014-es áraink számolva a modell alapján várhatóan az 5.10. ábrán látható módon alakulnak a nyugdíjrendszer bevételei és kiadásai a jövőben. A 2015–2030 közötti időszakban a rendszer bevételei és kiadásai várhatóan igen közel lesznek egymáshoz. A kiadások először várhatóan 2026-ban haladják meg a bevételeket, és ettől az évtől kezdve az előrejelzési időszak végéig a nyugdíjrendszer egyenlege folyamatosan negatív is marad. Az első deficit évben a hiány 13,4 milliárd forintról indul, majd ezt követően egyre gyorsuló ütemben növekedve a vizsgált időszak végére várhatóan már a 300 milliárd forintot is megközelíti

---

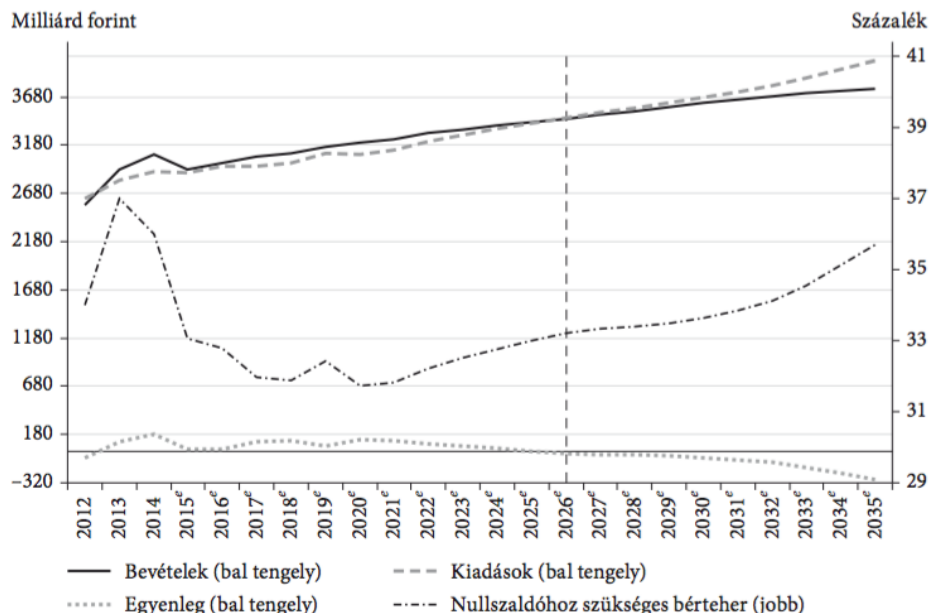
<sup>7</sup> Ez nagyjából évi két hónap emelést jelent, amelyet a szerzők három évenként fél év emeléssel közelítették, 67 évig emelve a nyugdíjkorhatárt az 1969–1971 közt születettek esetén.



5.9. ábra. A modell eredményeinek összehasonlítása az ONYF adataival (forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

(2014. évi árakon), ami az összes bevétel közel 8 százaléka. Ahogy az 5.10. ábrán is látható, ennek a gyorsuló ütemben növekvő hiánynak az oka a bevételek emelkedési ütemének csökkenése. Ez az úgynevezett Ratkó-unokák munkaerő-piaci aktivitásának csökkenésével van összefüggésben, ugyanis ezek a kohorszok a 2030-as évekre már az ötvenes éveik közepén lesznek, amikor az aktivitási arány már számottevően csökken az alacsonyabb életkorokban megfigyelhetőkhöz képest.

Az 5.10. ábrán szerepel még a kiadások és bevételek egyensúlyát biztosító bérterhek (a szociális hozzájárulási adó nyugdíjalapba kerülő része és az egyéni nyugdíjjárulék összege kifejezve a bruttó bér százalékában) görbéje is. A modell alapján az időszak végére várhatóan 35,7 százalékos bérteher lesz szükséges ahhoz, hogy a bevételek fedezzék a kiadásokat, ami a járulékkulcsok emelése nélkül csak a szociális hozzájárulási adóbevételek Egészségbiztosítási Alap kárára történő átcsoportosításá-

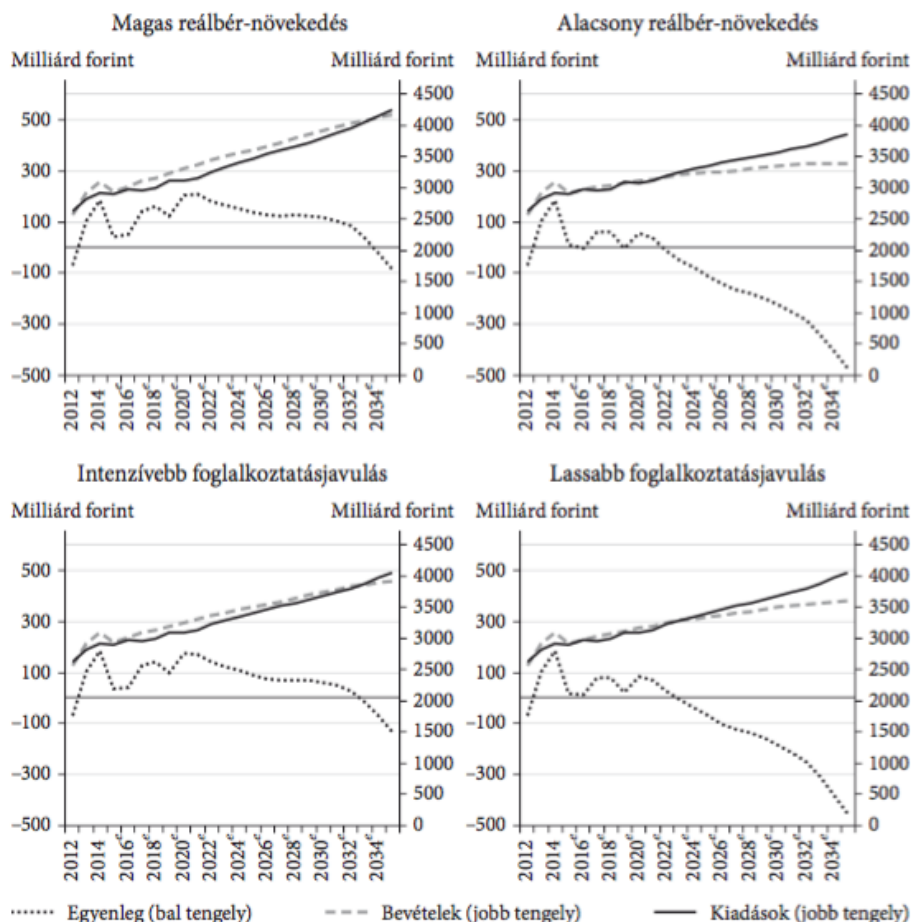


5.10. ábra. A Nyugdíjbiztosítási Alap főbb mutatóinak várható alakulása az alapforgatókönyv esetén (2014. évi árakon, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

val valósítható meg.

Az 5.3. alfejezetben bemutatott, foglalkoztatásra és reálbér-emelkedésre vonatkozó alternatív forgatókönyvek hatása az 5.11. ábrán látható.

Az ábra alapján a nyugdíjrendszer egyenlege még magas reálbér-emelkedés esetén is negatívvá válik a vizsgált periódus vége előtt, azonban az első deficités év az alapesethez képest csak nyolc évvel később, 2034-ben következik be, és egészen 2031-ig a rendszer 100 milliárd forint feletti bevételi többlettel rendelkezik. Ha azonban az alacsony reálbér-emelkedés valósulna meg, akkor a rendszer az alapesethez képest négy évvel korábban, már 2022-től folyamatosan negatív egyenleggel zárna, ez a hiány pedig évről évre növekedve az időszak végére már a 470 milliárd forintot is elérné (2014. évi árakon). A foglalkoztatottság intenzívebb javulása mintegy hét évvel képes késleltetni az egyenleg negatívvá válását a normál esethez képest, az időszak végén jelentkező éves hiány

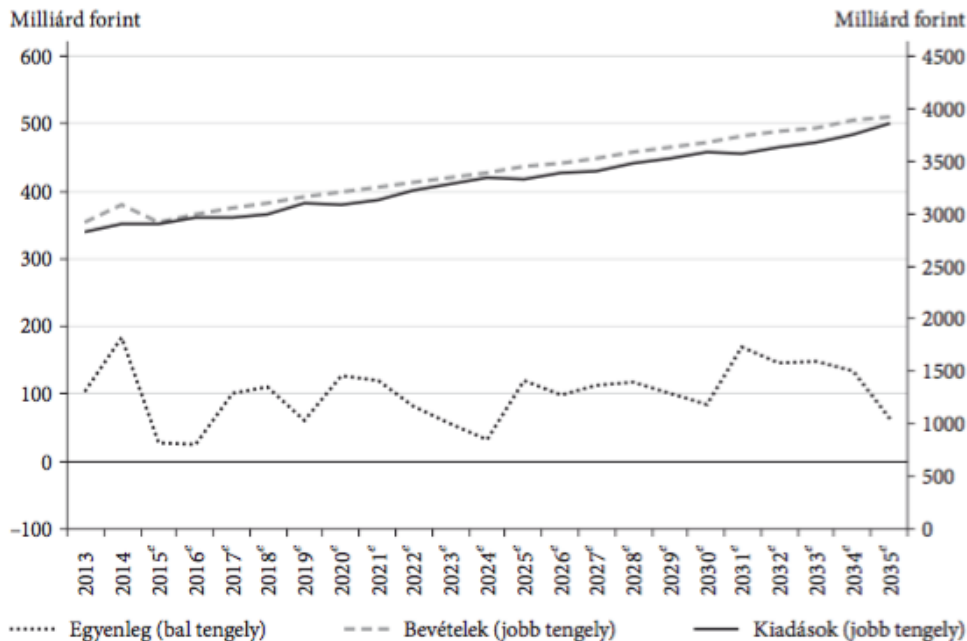


5.11. ábra. A Nyugdíjbiztosítási Alap főbb mutatóinak várható alakulása a makrogazdasági paraméterekre vonatkozó alternatív forgatókönyvek esetén (2014. évi árakon, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

pedig 160 milliárd forinttal lenne kevesebb, mint az alapesetben. Ezzel szemben lassabb javulás esetén az alapesethez képest már három évvel korábban, 2022-től negatívvá válna az egyenleg, 2035-re pedig a hiány már elérné a 450 milliárd forintot.

A nyugdíjkorhatár betöltésekor várható hátralévő élettartamhoz igazított korhatáremelés hatását az 5.12. ábra szemlélteti. Az ábrán látható, hogy ez esetben a rendszer egyenlege várhatóan a vizsgált időszak vé-





5.12. ábra. A Nyugdíjbiztosítási Alap főbb mutatóinak várható alakulása a nyugdíjkorhatár várható élettartamhoz igazított folyamatos emelése esetén (2014. évi árakon, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

géig pozitív maradna.<sup>8</sup>

Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] az itt bemutatott eredmények alapján amellet érvelnek, hogy bár a jelenleg folyamatban lévő nyugdíjkorhatár-emelés az elkövetkező tíz évre biztosítja a nyugdíjrendszer fenntarthatóságát, azonban a kedvezőtlen demográfiai folyamatok a 2020-as évek második felétől kezdődően egyre súlyosabb terhet rónak a nyugdíjrendszerre, amelyet önmagában sem a bemutatott mértékű reálbér-emelkedés, sem pedig a foglalkoztatottság feltételezett javulása nem képes ellensúlyozni. Így arra a következtetésre jutnak, hogy a rendszer fenntarthatósága érdekében érdemes megvizsgálni a nyugdíjkorhatár 2022 utáni további emelését, a korhatár betöltésekor várható

<sup>8</sup> Az egyenleg látványos ingadozását a korhatáremelés kezelésére vonatkozó egyszerűsítés (három évenként fél év emelés) okozza a modellben.

átlagos hátralévő élettartam emelkedésének megfelelően.<sup>9</sup>

A szerzők hosszabb távú megoldásnak a demográfiai helyzet – a Ratkó-unokák 2040-es évekbeli nyugdíjba vonulása miatti – várható további romlása miatt egy olyan átfogó intézkedéscsomagot tekintenek, amely a gyermekvállalás ösztönzésére koncentrálna. Mivel azonban ez leghamarabb csak 20-30 év múlva kezdhetné érzékelteni hatását, így amellet érvelnek, hogy addig közép- és rövid távú intézkedésekkel szükséges fenntartani a nyugdíjrendszer egyensúlyát. Úgy vélik, hogy ilyen, középtávon hatásos intézkedés a munkaerőpiac élénkítése lehet, melynek fontos része az Ratkó-unokák munkaerőpiacon tartása és munkaképességük minél hosszabb fenntartása (például egészségmegőrzéssel, képzésekkel). A fenntarthatóság érdekében javasolják továbbá, hogy a jövőben a nyugdíjak indexálása kizárólag azok reálértékének megőrzését szolgálja, rámutatva olyan múltbeli esetekre, amikor az infláció felülbecslése miatt a nyugdíjak reálértéke emelkedett.

Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] javaslatai között kiemelt helyet foglal el a gyermekvállalás ösztönzése, de ennél konkrétabban nem említene ilyen irányú lehetséges intézkedéseket. A problémakör rendkívül szerteágazó, melyet jól szemléltetnek a Kovács [2012] tanulmánykötetben szereplő, a gyermekvállalás és a nyugdíjrendszer közötti összefüggésekkel foglalkozó tanulmányok. E problémakör messze túlmutat a jelen könyv keretein, mégis csupán az illusztráció kedvéért érdemesnek tartom röviden ismertetni a Banyár [2014] tanulmányában<sup>10</sup> szereplő javaslatot. A cikk szerzője amellet érvel, hogy a folyó finanszírozású nyugdíjrendszerek nem kellő mértékben veszik figyelembe a gyermekvállalás költségeit, ezért olyan új paradigmára van szükség, melyben

---

<sup>9</sup> Dániában alkalmaznak hasonló megoldást a nyugdíjkorhatár emelésére.

<sup>10</sup> Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] nem említik ezt a lehetséges megoldást.

az állami nyugdíj valójában a gyermeknevelés költségeinek utólagos elmentételezése. A szerző által javasolt rendszer logikájából következik, hogy abban csak a gyermekeket felnevelt szülőknek járna a gyermekek számától és a járulékbefizetésektől függő nagyságú állami nyugdíj, míg a gyermektelenek számára egy párhuzamos, tőkésített nyugdíjrendszer állna rendelkezésre, így ez utóbbiak az elmaradt gyermeknevelési költségeikből képezhetnének saját maguk számára nyugdíjjogosultságot.

A gyermekvállalás ösztönzésének hangsúlyozásán kívül különösen fontosnak tartom az aktuáriusi elv hangsúlyozott érvényesítését és az egyéni szintű be- és kifizetések közötti összhang növelését, ami például egy névleges egyéni számlás (NDC) állami nyugdíjrendszer bevezetésével biztosítható. Egy ilyen elszámolási rendszer keretében aktuáriusi szempontból igazságos módon kezelhetők például a korhatár előtti nyugdíjazások, továbbá jelentősen nő a nyugdíjas évek tervezhetősége és a nyugdíjak átláthatósága. Európában jelenleg Lengyelországban, Norvégiában, Olaszországban és Svédországban működik ilyen rendszer. A bevezetés óta azonban egyelőre túl kevés idő telt el a tapasztalatok átfogó értékeléséhez.

A nyugdíjkorhatár emelése Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] elemzése alapján igen hatásos eszköznek tűnik, akár a Dániában sikerrel alkalmazott, a nyugdíjkorhatáron várható élettartamhoz igazított folyamatos kiigazítással vagy valamely egyéb megoldással. Ennek ellenére véleményem szerint a korhatáremelés gyakorlati problémákba ütközhet: kérdés, hogy a 65 évnél idősebb egyének képzettsége és egészségi állapota megengedi-e a foglalkoztatásukat, és hogy a vállalatok részéről lenne-e erre elegendő hajlandóság. Emiatt különösen fontos lenne egy ilyen intézkedés esetén az egészségmegőrzés támogatása és a szak-

mai továbbképzések továbbfejlesztése, mert különben a korhatáremelés könnyen növekvő munkanélküliséghez és társadalmi feszültségekhez vezethet. Különösen a hazai férfiak várható élettartama rendkívül alacsony európai összehasonlításban, így számukra különösen igazságtalannak tűnhet a korhatár további emelése. Mivel Magyarországon európai viszonylatban igen magas a korai nyugdíjazások aránya, ezért véleményem szerint a korhatár növelése mellett a valódi cél az átlagos nyugdíjba vonulási életkor növelése kell legyen, ami a karkedvezményes nyugdíjazási lehetőségek csökkentésével, a korai nyugdíjazás aktuáriusi szempontból igazságos szankcionálásával és a korhatár előtti foglalkoztatás ösztönzésével érhető el.

A megoldási lehetőségek tárgyalásának lezárásaképpen úgy gondolom, hogy a jelen fejezetben bemutatott modellen, valamint a szerzők és Banyár [2014] konkrét javaslatain túl érdemes tételelesen is végiggondolni, mitől függhet az állami nyugdíjrendszer hosszú távú fenntarthatósága. Néhány ilyen lényeges tényező:

- a halandóság és egészségügy,
- a gyermekvállalási hajlandóság és termékenység,
- a be- és kivándorlás,
- a munkaerő-piaci aktivitási ráta és a ledolgozott munkaórák száma,
- a nyugdíjkorhatár és a tényleges nyugdíjazási életkor,
- a nyugdíjak szintje,
- a járulékkulcs és a hozzájárulások mértéke,
- a nyugdíjrendszer jellege (klasszikus folyó finanszírozású, NDC, tőkésített, alapnyugdíjat tartalmazó stb.),

- a rokkant-, özvegyi és egyéb ellátások rendszere, stb.

Láthatóan igen összetett problémakörrel van szó, melyre a hazai társadalombiztosítás számos érintett területre kiterjedő, a hasonló problémákkal küszködő országok tapasztalataira is építő újragondolása és reformja jelenthet hosszú távú megoldást. Ez azonban messze túlmutat a könyv keretein.

## 5.6. Mikroszimulációs modellek

Ez a szakasz Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] 5.2. alfejezetben ismertett kohorszmodelljén túllépve, annak jövőbeli kívánatos kiterjesztéseként a mikroszimulációs megközelítést ismerteti röviden Vékás [2015] és Kovács–Rétallér–Vékás [2015] cikkei alapján, a hazai gyakorlat bemutatására fókuszálva, kimondottan a teljesség igénye nélkül.

A nyugdíjmodellezésben az ezredforduló óta eltelt években teret nyert úgynevezett *sztochasztikus-dinamikus mikroszimulációs modellek* (Li–O’Donoghue [2013]) a nyugdíjrendszerek makro- és kohorszmodelleknél precízebb vizsgálatát teszik lehetővé. E módszerek a vizsgált makrogazdasági aggregátumok vagy születési év szerinti kohorszok modellezése helyett a rendszer által érintett járulékfizetők és járadékszolgáltatásban részesülők viselkedését és döntéseit egyéni szinten írják le és jelzik előre. A mikroszimulációs módszerek előnye, hogy a modellezni kívánt aggregátumok várható értékei mellett azok eloszlását is megfelelően képesek előre vetíteni, és az aggregátumokon belül végbemenő összetételváltozások más változókra gyakorolt hatását is statisztikai szempontból megfelelő módon képesek kezelni. Segítségükkel elemezhetők például olyan jövedelem-újraelosztási hatások, amelyeket a makromodellek

nem képesek megragadni. E modellek az egyéni döntéshozók viselkedését statisztikai-ökonometriai eljárások felhasználásával becsült viselkedési egyenletekkel, intertemporális várható hasznossági függvények maximalizálásával vagy e két módszer családjának ötvöztetésével is leírhatják.

Magyarországon – a Nemzetgazdasági Minisztérium és elődintézményei, valamint a Magyar Nemzeti Bank által korábban alkalmazott makro- és kohorszmodelleket kiegészítendő – a Nyugdíj és Időskor Kerekasztal hozott döntést egy átfogó mikroszimulációs modellkeret, illetve azon belül több mikroszimulációs nyugdíjmodell létrehozásáról (Holtzer [2010]). Az első, részleges modelleket követően az Országos Nyugdíjbiztosítási Főigazgatóság (ONYF) a 2012–2015 közötti időszakban készítette el a Belgiumban alkalmazott MIDAS (*Microsimulation for the Development of Adequacy and Sustainability*, lásd Dekkers–Belloni [2009] és Dekkers [2010]) nagy méretű sztochasztikus-dinamikus mikroszimulációs modell hazai adaptációját (ONYF [2015]) egy közel fél évszázadra kiterjedő, nagy részletességű, egyéni szintű adatokat tartalmazó informatikai adatbázis alapján.

A MIDAS modell számos egymással kölcsönhatásban álló modulból és almodulból (például munkaerőpiac, foglalkoztatás, jövedelmek, születések, halálozások, házasságok stb.) áll, és az egyéni döntéseket többváltozós statisztikai eljárások segítségével becsült viselkedési egyenletekkel írja le. A modell az egyéb előrejelzésekkel való konzisztencia érdekében számos ponton uniós intézmények aggregált előrejelzéseire támaszkodik, így az egyéni szintű és eloszlásjellegű eredmények adják fő hozzájárulását a már ismert predikciókhoz. A modell kulcsfontosságú része a munkaerő-piaci aktivitás modellezése, amelyet Vékás [2015] tanulmánya ismertet. A cikkben bemutatott

becslés statisztikai viselkedési egyenletekre épül az egyének múltbeli munkaerő-piaci aktivitására, születési évre, nemére, foglalkozására és lakóhelyére vonatkozó információk felhasználásával. A hiányzó adatok pótlását, az egyének foglalkoztatás-történet szerinti szegmentálását és az utolsó ismert évre vonatkozó egyéni jogosultságszerzési idők alapján kialakított, aktivitásra vonatkozó bináris eredményváltozó kialakítását követően Vékás [2015] bináris logisztikus regressziós becslést alkalmaz, figyelembe véve a módszer más eljárásokkal szembeni előnyeit és a MIDAS modellek szerkezetéből adódó korlátokat. A tanulmány nagy hangsúlyt fektet a becslés körütekintő validálására. A modell az osztott mintás validáció céljából kialakított tesztelő állományon magas, 80 százalék körüli találati pontossággal rendelkezik.

A tanulmányban alkalmazott statisztikai megközelítés korlátja, hogy bár az egyéni foglalkoztatás tényét kielégítő pontossággal képes legalább rövid távon előre jelezni, a munkaerőpiac keresleti és kínálati oldalán jelentkező hatásokat nem képes elválasztani egymástól, és explicit módon nem jelenik meg benne a kereslet és kínálat között jelentkező mennyiségi eltérés. Továbbá optimalizáló viselkedés hiányában az exogén paraméterek (például nyugdíjkorhatár) változása esetén nem veszi figyelembe az egyéni viselkedés esetleges változásait. Fontos megjegyezni, hogy a felhasznált adminisztratív adatállomány természeténél fogva nem terjed ki a feketegazdaságban foglalkoztatottakra. Ez a probléma ugyanakkor az ONYF számára lényeges nyugdíjjárulék-befizetések és nyugdíjkifizetések modellezése során kevésbé releváns.

A Vékás [2015] tanulmányában szereplő becslést évről évre szekvenciálisan alkalmazva, az exogén uniós előrejelzésekhez történő kiigazítás figyelembe vételével egyénenként becsülhető a modellben a jövőbeli évek-

re vonatkozó munkaerő-piaci aktivitás, amely a MIDAS modell többi moduljával kölcsönhatásban együttesen előre vetítheti például a nyugdíjassza jövőbeli bevételeinek és kiadásainak egyénenkénti alakulását, egyes társadalmi csoportok anyagi helyzetének jövőbeli változásait stb. Mivel a tanulmány elkészültének időpontjában a teljes mikroszimulációs modell még nem készült el, így a tanulmányban szereplő eredmények szükségszerűen részlegesek: a modulok közötti kölcsönhatások miatt a félkész modell teljeskörű nyugdíj-hatásvizsgálat elvégzésére és munkaerő-piaci forgatókönyvek, illetve paraméteres nyugdíjreformok vizsgálatára nem volt alkalmas. Azonban a jövőben a becsült munkaerő-piaci egyenletek a MIDAS modell keretein belül lehetővé teszi az eddigieknél alaposabb nyugdíj-hatásvizsgálatok készítését.

A modell az élettartam-kockázat és a nyugdíjrendszer fenntarthatóságának pontosabb modellezéséhez is hozzájárulhat azzal, hogy a bevételeknél figyelembe vett aggregált járulékalap számítása során az aggregált foglalkoztatottság változásán túl a foglalkoztatottság összetételének változását is képes figyelembe venni.

Érdemes szót ejteni még a MIDAS modellhez hasonló mikroszimulációs módszerek összetettségéből fakadó nehézségekről. Az ilyen modellek egyéb megközelítésekhez képest jóval jelentősebb számítási kapacitásigényei, implementációs és személyi költségei, valamint az adatokkal szemben támasztott minőségi elvárásai (Kovács–Rétallér–Vékás [2015]) kívánatosá tesznek bizonyos strukturális egyszerűsítéseket. Az aktuáriusi gyakorlatban elterjedt egyszerűsítő eljárás az úgynevezett *modellpontok* létrehozása: ebben az esetben a modellező a szimulációs számításokat – vagy azok egy részét – egyének helyett azok homogén csoportjaira hajtja végre. A csoportosítás elkészítése során a minél egyszerűbb



modellszerkezet (azaz minél kevesebb modellpont) és az egyszerűsítés során elkövetett minél kisebb hiba iránti igényeket – mint két egymásnak ellentmondó szempontot – egyszerre szükséges figyelembe venni. Kovács–Rétallér–Vékás [2015] tanulmányukban módszertani megfontolásokból a mintavételes, klaszterező és definícióval adott, többdimenziós kategóriakombinációkat képző csoportosítások közül Holtzer [2010] nyomán a harmadik módszer családot választják, melynek segítségével a magyar felnőtt népességet demográfiai, jövedelmi és nyugdíjjogosultsági jellemzők alapján hozzávetőleg 93 ezer modellpontra osztják fel, a KSH adatai alapján kiküszöbölve az esetleges adathiányokat, és teljes körűvé téve a csoportosítást. A szerzők tanulmányában bemutatott csoportosítás nagyban megkönnyíti a mikroszimulációs megközelítés gyakorlati alkalmazását.

### III. rész

## Újabb halandóság-előrejelző módszerek és alkalmazásuk



## 6. fejezet

# Az általánosított korcsoport–időszak–kohorsz (GAPC) modellesalád

Ebben a fejezetben a Villegas és szerzőtársai [2016] által a közel-múltban javasolt, számos széles körben elterjedt halandóság-előrejelző módszert felölelő általánosított korcsoport–időszak–kohorsz (GAPC) modellesalád elméletét ismertetem. A fejezetben az  $m_{xt}$  jelölés az  $x \in \{1, 2, \dots, X\}$  korcsoporthoz és  $t \in \{1, 2, \dots, T\}$  időszakhoz tartozó általános,  $m^0$  kezdeti vagy  $m^c$  központi halandósági rátákra vonatkozik, és az  $1, 2, \dots, T$  indexek továbbra is minden esetben egymást követő naptári éveket jelölnek majd.

### 6.1. A modell felírása

A GAPC modellesalád alkalmazása feltételezi, hogy minden egyes  $x \in \{1, 2, \dots, X\}$  korcsoportban és  $t \in \{1, 2, \dots, T\}$  időszakban is-

mert a bekövetkezett halálesetek  $D_{xt} \in \mathbb{N}$  száma, valamint az  $E_{xt}^c > 0$  központi vagy az  $E_{xt}^0 \in \mathbb{N}_{>0}$  kezdeti kitettség értéke.<sup>1</sup>

A korcsoport- és időszakspecifikus halálozások  $D_{xt}$  számait a modell a  $\tilde{D}_{xt}$  valószínűségi változók megvalósult értékeinek tekinti, melyek peremeloszlására vonatkozó feltevés – a rendelkezésre álló kitettségi adatok típusától függően – a Poisson vagy a binomiális eloszlás:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{xt} &\sim \text{Poisson}(E_{xt}^c m_{xt}^c) \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T) \\ \text{vagy} \quad \tilde{D}_{xt} &\sim \text{Bin}(E_{xt}^0, m_{xt}^0) \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T). \end{aligned} \quad (6.1)$$

A GAPC modellkeret feltételezi továbbá, hogy a (6.1) egyenletbeli  $\tilde{D}_{xt}$  ( $x = 1, 2, \dots, X, t = 1, 2, \dots, T$ ) valószínűségi változók függetlenek.<sup>2</sup> A (6.1) összefüggésben szereplő központi vagy kezdeti halandósági ráták becslőegyenletei a következők:

$$g(m_{xt}) = \eta_{xt} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T), \quad (6.2)$$

ahol  $\eta_{xt}$  a modell úgynevezett szisztematikus komponense,  $g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  pedig folytonosan differenciálható, szigorúan monoton növekvő függvény (az úgynevezett *kapocsfüggvény* vagy angolul *link function*). Hunt–Blake [2014] az általánosított lineáris modell szakirodalmára építve központi kitettségek és Poisson-eloszlás használata esetén a  $g(y) = \ln y$  ( $y > 0$ ) logaritmikus, kezdeti kitettségek és binomiális eloszlás alkalmazása esetén pedig a  $g(y) = \ln \left( \frac{y}{1-y} \right)$  ( $0 < y < 1$ ) logit kapocsfüggvényt javasolják. A könyv a továbbiakban ezt a konvenciót követi.

<sup>1</sup> Precízebben: minden korcsoport-időszak kombinációra a kitettség azonos változata ismert.

<sup>2</sup> Pontosabban fogalmazva: adott halandósági ráták mellett feltételeesen függetlenek.

A GAPC modelles család (6.2) egyenletbeli szisztematikus komponense a korcsoport, időszak és kohorsz függvényében így írható fel:

$$\eta_{xt} = a_x + \sum_{i=1}^N b_x^{(i)} k_t^{(i)} + b_x^{(0)} c_{t-x} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T), \quad (6.3)$$

ahol  $N \in \mathbb{N}$  a modellezett korcsoport-időszak interakciók száma, valamint  $a_x$  és  $\{b_x^{(i)}\}_{i=0}^N$  korcsoporttól,  $\{k_t^{(i)}\}_{i=1}^N$  időszaktól,  $c_{t-x}$  pedig kohorsztól függő, valós értékű paraméterek.

Mivel a modellbeli kohorszok lehetséges száma  $T + X - 1$ , ezért belátható, hogy a (6.3) egyenlet paramétereinek száma  $(N+1)(X+T)+2X-1$ , melyek elegendően nagy  $X$  és  $T$  értékek esetén képesek lehetnek kellően tömören leírni az ismert  $XT$  darab halandósági rátát.

A becsült paraméterek egyértelműsége érdekében a (6.3) egyenletet a Lee–Carter modellbeli identifikációs megkötésekkel analóg korlátozó feltételekkel szükséges kiegészíteni, melyek konkrét modellspecifikációnként eltérnek.

## 6.2. Interpretáció

A (6.3) egyenlet paramétereinek értelmezése szükségszerűen bonyolultabb a Lee–Carter modell interpretációjánál:

- *Korcsoport-hatás:* Az  $a_x$  ( $x = 1, 2, \dots, X$ ) paraméterek a halandósági szint életkortól függő alakulását írják le.
- *Kohorszhatás:* A  $c_{t-x}$  ( $x = 1, 2, \dots, X$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ ) paraméterek a  $t - x$  időszakban született kohorsz halandóságának a tipikus halandósági pályához képesti eltérését reprezentálják a modellben.

- *Mortalitási indexek:* A  $k_t^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ ) paraméterek az általános halandósági szint időbeli alakulását  $N$  darab idősor formájában modellezzik.
- *Életkorfüggő érzékenységek:* A  $b_x^{(i)}$  ( $x = 1, 2, \dots, X$ ) érzékenységi együtthatók a transzformált halandósági ráták érzékenységét adják meg  $i = 0$  esetén a kohorszhatás,  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  esetén pedig az  $i$ -edik mortalitási index megváltozására nézve. Ha az adott  $i$  indexhez tartozó kohorszhatás vagy mortalitási index értéke ceteris paribus egységnivel nő, akkor a modell szerint a  $g(m_{xt})$  transzformált halandósági ráta értéke  $b_x^{(i)}$  egységgel növekszik, vagyis speciálisan logaritmikus kapocsfüggvény mellett az  $m_{xt}^c$  központi halandósági ráta, logit kapocsfüggvény mellett pedig az  $\frac{m_{xt}^0}{1-m_{xt}^0}$  esélyhányados értéke  $e^{b_x^{(i)}}$ -szeresére változik.

### 6.3. A GAPC modelles család nevezetes tagjai

Alkalmasan választott paraméterezés mellett a GAPC modelles család számos széles körben használatos halandóság-előrejelző módszert tartalmaz. Ebben a szakaszban a legnevezetesebb ilyen módszereket és azok GAPC modelles családhoz fűződő viszonyát ismertetem. A módszerek bemutatása során a korcsoportok minden esetben egymást követő koréveket jelentenek majd.

#### 6.3.1. A Poisson Lee–Carter (LC) modell

A Brouhns és szerzőtársai [2002a] által bevezetett és azóta széles körben elterjedt modellkeretben a halandóságot leíró szisztematikus komponens a Lee–Carter modell (4.1) alapegyenletének hibatagok nélküli

változata:

$$\eta_{xt} = a_x + b_x k_t \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T). \quad (6.4)$$

Brouhns és szerzőtársai [2002a] cikkükben központi kitettségeket és logaritmikus kapocsfüggvényt feltételeznek, így a (6.2) összefüggés következtében a (6.4) egyenlet bal oldalán a (4.1) egyenlethez hasonlóan az  $\ln m_{xt}^c$  központi logaritmikus halandósági ráták állnak.

A (6.4) egyenletben a normális eloszlású  $\varepsilon_{xt}$  hibatagok hiányát az indokolja, hogy a modell ezen változatában a halandósági ráták becsült értékek körüli véletlen ingadozását a halálesetek számát leíró  $\tilde{D}_{xt}$  valószínűségi változók varianciája ragadja meg.

A (6.4) egyenlet paramétereinek értelmezése egyébként azonos a 4.2. alfejezetben korábban már leírtakkal. Identifikációs megfontolásból a

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^X b_x &= 1, \\ \sum_{t=1}^T k_t &= 0 \end{aligned}$$

paramétermegkötések a modell e változatában is érvényesek.

A (6.4) összefüggésbeli szisztematikus komponens által meghatározott modell nyilvánvalóan a GAPC model család tagja a (6.2) egyenlet alábbi paraméterezése mellett:

$$\begin{aligned} N &= 1, \\ b_x^{(1)} &= b_x \quad (x = 1, 2, \dots, X), \\ k_t^{(1)} &= k_t \quad (t = 1, 2, \dots, T), \\ b_x^{(0)} &= 0 \quad (x = 1, 2, \dots, X), \end{aligned}$$



$$c_{t-x} = 0 \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T).$$

A modell nem tartalmaz kohorszhatást, illetve a halandóság alakulását egyetlen időtől függő mortalitási index segítségével modellezi.

Ebben a modellváltozatban a paraméterek becslését követően nincs szükség a mortalitási index 4.4. alfejezetben ismertetett kiigazítására, mivel a Poisson Lee–Carter modell a korcsoportok létszámait a kitettségek és halálesi gyakoriságok révén explicit módon figyelembe veszi. Érdemes megjegyezni, hogy a Lee–Carter modell 4. fejezetben ismertetett alapváltozata nem illeszkedik a GAPC modellcsaládba.

### 6.3.2. A Renshaw–Haberman (RH) modell

Renshaw–Haberman [2006] a kohorszhatás figyelembe vételére a Poisson Lee–Carter modell (6.4) egyenletének alábbi módon bővített változatát javasolják:

$$\eta_{xt} = a_x + b_x^{(1)} k_t^{(1)} + b_x^{(0)} c_{t-x} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T),$$

amely a GAPC modellcsalád (6.3) egyenletének speciális esete  $N = 1$  mellett. Cikkükben Renshaw–Haberman [2006] központi kitettségeket és logaritmikus kapocsfüggvényt feltételeznek.

Mivel a modell kritikusai rámutattak a becslési eljárás numerikus instabilitására, ezért újabb cikkükben Haberman–Renshaw [2011] modelljük egyszerűsítése érdekében a

$$b_x^{(0)} = 1 \quad (x = 1, 2, \dots, X)$$

paramétermegkötéseket ajánlják, mely – lemondva a kohorszhatás életkor szerinti differenciálásáról – általában megoldja az eredetileg javasolt modell numerikus problémáit.<sup>3</sup> Az így módosított Renshaw-Haberman modell szisztematikus komponense:

$$\eta_{xt} = a_x + b_x k_t + c_{t-x} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T). \quad (6.5)$$

A szerzők a paraméterbecslés egyértelműsége érdekében a következő identifikációs megkötéseket javasolják:

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^X b_x &= 1, \\ \sum_{t=1}^T k_t &= 0, \\ \sum_{i=1-X}^{T-1} c_i &= 0. \end{aligned}$$

Jelen könyvben a továbbiakban mindig a Renshaw-Haberman modell (6.5) egyenlet szerinti változata fog szerepelni.

### 6.3.3. A korcsoport–időszak–kohorsz (APC) modell

A Carstensen [2007] által ismertetett korcsoport–időszak–kohorsz (angolul Age–Period–Cohort vagy röviden APC) modell a (6.5) egyenlet szerinti módosított Renshaw-Haberman modell speciális esete  $b_x = 1$  ( $x = 1, 2, \dots, X$ ) mellett. A modell szisztematikus komponense:

$$\eta_{xt} = a_x + k_t + c_{t-x} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T).$$

---

<sup>3</sup> Hunt-Villegas [2015] megmutatták, hogy sajnos még ebben az egyszerűsített modellváltozatban is felléphetnek problémák a paraméterbecslés során.

Tehát az APC modell  $N = 1$  mortalitási indexet tartalmaz, továbbá a korcsoport, időszak és kohorsz halandóságra gyakorolt hatásait nem módosítják korcsoportfüggő érzékenységi együtthatók.

Az APC modellben a központi kitettségek és a logaritmikus kapcsolófüggvény használata, valamint az alábbi identifikációs megkötések alkalmazása elterjedt:

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^T k_t &= 0, \\ \sum_{i=1-X}^{T-1} c_i &= 0, \\ \sum_{i=1-X}^{T-1} i c_i &= 0.\end{aligned}$$

#### 6.3.4. A Cairns–Blake–Dowd (CBD) modell

Az időskori halandóság előrejelzésére javasolt Cairns–Blake–Dowd [2006] modell szisztematikus komponense:

$$\eta_{xt} = k_t^{(1)} + (x - \bar{x})k_t^{(2)} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T), \quad (6.6)$$

ahol  $\bar{x} = \frac{1+X}{2}$  az előforduló korcsoport-indexek számtani átlaga.

A módszer alkalmazását a szerzők  $x_0 = 60$  évesnél magasabb életkorok esetén javasolják, azzal a kiegészítéssel, hogy a (6.6) egyenletbeli  $\eta_{xt}$  szisztematikus komponens az  $x_0 + x$  éves egyének halandóságát írja le. Cairns–Blake–Dowd [2006] cikkükben kezdeti kitettségeket és logit kapcsolófüggvényt tételeznek fel.

A CBD modell (6.6) egyenlete a GAPC modellcsalád (6.3) egyenletének

speciális esete az alábbi paraméterezés mellett:

$$\begin{aligned}
 N &= 2, \\
 a_x &= 0 \quad (x = 1, 2, \dots, X) \\
 b_x^{(1)} &= 1 \quad (x = 1, 2, \dots, X), \\
 b_x^{(2)} &= x - \bar{x} \quad (x = 1, 2, \dots, X), \\
 b_x^{(0)} &= 0 \quad (x = 1, 2, \dots, X), \\
 c_{t-x} &= 0 \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T).
 \end{aligned}$$

A CBD modellben nem szerepel additív életkorhatás és kohorszhatás<sup>4</sup>, és a halandóság alakulását két mortalitási index írja le, melyek együtthatói adottak. E modellben nincs szükség identifikációs megkötésekre.

### 6.3.5. A Plat modell

A Plat [2009] modell szisztematikus komponense:

$$\begin{aligned}
 \eta_{xt} &= a_x + k_t^{(1)} + (x - \bar{x})k_t^{(2)} + (\bar{x} - x)^+ k_t^{(3)} + c_{t-x} \\
 &\quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T),
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

ahol  $\bar{x} = \frac{1+X}{2}$  az előforduló korcsoport-indexek számtani átlaga, valamint  $(\bar{x} - x)^+ = \max\{\bar{x} - x; 0\}$ .

A szerző az időskori halandóság vizsgálata esetén a (6.7) egyenletbenli  $k_t^{(3)}$  harmadik mortalitási index elhagyását javasolja (mivel ekkor

---

<sup>4</sup>Érdemes megjegyezni, hogy a CBD modell bővítéseként Cairns és szerzőtársai [2009] kohorszhatás bevezetését javasolják. E modellváltozatot a továbbiakban nem tárgyalom.

$x > \bar{x}$ ), melynek következtében a (6.7) egyenlet így egyszerűsödik:

$$\eta_{xt} = a_x + k_t^{(1)} + (x - \bar{x})k_t^{(2)} + c_{t-x} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T). \quad (6.8)$$

A (6.8) egyenletbeli  $\eta_{xt}$  szisztematikus komponens az  $x_0 + x$  éves egyének halandóságát írja le, ahol  $x_0$  valamely kiinduló életkor (például  $x_0 = 60$ ). A továbbiakban a Plat modell (6.8) egyenlet szerinti változatát alkalmazom majd, amely a GAPC modellcsalád (6.3) egyenletének speciális esete az alábbi paraméterezés mellett:

$$N = 2,$$

$$b_x^{(0)} = 1 \quad (x = 1, 2, \dots, X),$$

$$b_x^{(1)} = 1 \quad (x = 1, 2, \dots, X),$$

$$b_x^{(2)} = x - \bar{x} \quad (x = 1, 2, \dots, X).$$

Plat [2009] cikkében központi kitettségeket és logaritimikus kapcsolási függvényt feltételez, és az alábbi identifikációs megkötéseket javasolja:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T k_t^{(1)} &= 0, \\ \sum_{t=1}^T k_t^{(2)} &= 0, \\ \sum_{i=1-X}^{T-1} c_i &= 0, \\ \sum_{i=1-X}^{T-1} i c_i &= 0. \end{aligned}$$

### 6.3.6. Áttekintés és csoportosítás

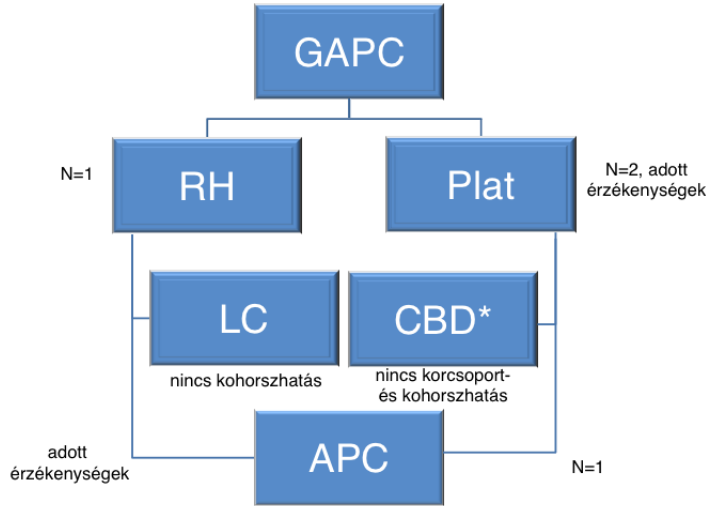
A GAPC modellcsalág tagjai számos szempontrendszer szerint csoportosíthatók. Néhány lényeges csoportosítás:

- A modellezett mortalitási indexek száma (az  $N$  paraméter).
- Korcsoport-hatás ( $a_x$  paraméterek) jelenléte.
- Kohorszhatás ( $c_{t-x}$  paraméterek) jelenléte.
- Az érzékenységi együtthatók ( $b_x^{(i)}$ ) jellege:
  - Nemparaméteres: például a Poisson Lee–Carter modell (6.4) egyenletbeli együtthatói.
  - Paraméteres: például a Cairns–Blake–Dowd modell (6.6) egyenletbeli együtthatói.
- A kitettségek, halandósági ráták, az eloszlásfeltevés és a kapcsolásfüggvény típusa szerint két fő esetet különíthető el:
  - központi kitettségek, központi halandósági ráták, Poisson-eloszlás és logaritmikus kapcsolásfüggvény,
  - kezdeti kitettségek, kezdeti halandósági ráták, binomiális eloszlás és logit kapcsolásfüggvény.

A GAPC modellcsaládhoz tartozó, jelen fejezetben bemutatott nevezetes modellek e szempontok szerinti csoportosítását a 6.1. ábrán és a 6.1. táblázatban szemléltetem.<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup> A 6.1. táblázatban \*-gal jelölt CBD modell kezdeti kitettségeket és logit kapcsolásfüggvényt feltételez. A többi modell esetén a központi kitettségek és a logaritmikus kapcsolásfüggvény alkalmazása általános.



6.1. ábra. A GAPC modellcsalád néhány nevezetes tagja és a közöttük fennálló hierarchia (forrás: saját szerkesztés)

Eljárás	Korcsoport	Kohorsz	N	Érzékenység	Kitettség	Kapocs
<b>APC</b>	van	van	1	egységnyi	központi	log
<b>CBD</b>	nincs	nincs	2	paraméteres	kezdeti	logit
<b>LC</b>	van	nincs	1	nemparaméteres	központi	log
<b>Plat</b>	van	van	2	paraméteres	központi	log
<b>RH</b>	van	van	1	nemparaméteres	központi	log

6.1. táblázat. Néhány nevezetes GAPC modell jellemzői (forrás: saját szerkesztés)

A 6.1. ábrán látható, hogy a GAPC modellcsalád két nevezetes ágát a Renshaw–Haberman és Plat modellek<sup>6</sup> adják. Az RH modell nevezetes almodelljei a kohorszhatást nem tartalmazó Poisson Lee–Carter és az egységnyi érzékenységi együttthatókkal rendelkező APC modellek, a Plat modell nevezetes aletei pedig a korcsoport- és kohorszhatást nem tartalmazó Cairns–Blake–Dowd és az egyetlen mortalitási indexet feltételező APC modellek. Az APC modell tehát – mint a legegyszerűbb, korcsoport- és kohorszhatást egyaránt tartalmazó modell – a GAPC

<sup>6</sup> Pontosabban: az RH modell Haberman–Renshaw [2011] cikkében bemutatott, egyszerűsített, valamint a Plat modell (6.8) egyenlet szerinti, időskori halandóság modellezésére javasolt változata.

modellcsalád mindkét ágának speciális esete, így a modellcsalád nevéhez híven bizonyos értelemben ezt a modellt általánosítja.

Az általános, illetve az időskori halandóság modellezésére ebben a sorrendben a 6.1. ábra bal oldali, illetve mindkét ágán szereplő modellek alkalmazhatók. Természetesen számos további halandóság-előrejelző eljárás előállítható a GAPC modellcsalád megfelelő paraméterezésével.

## 6.4. A paraméterek becslése

A GAPC családba tartozó modellek paramétereinek becslése a maximum likelihood elv alkalmazásával végezhető. A jelölés egyszerűsítése érdekében érdemes az ismeretlen paramétereket a

$$\begin{aligned}
 \zeta^T = & (a_1, a_2, \dots, a_X, \\
 & b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, \dots, b_X^{(0)}, \\
 & b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \dots, b_X^{(1)}, \\
 & b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, \dots, b_X^{(2)}, \\
 & \vdots \\
 & b_1^{(N)}, b_2^{(N)}, \dots, b_X^{(N)}, \\
 & k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, \dots, k_T^{(1)}, \\
 & k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, \dots, k_T^{(2)}, \\
 & \vdots \\
 & k_1^{(N)}, k_2^{(N)}, \dots, k_T^{(N)}, \\
 & c_{1-X}, c_{1-X+1}, \dots, c_{T-1}) \in \mathbb{R}^{(N+1)(X+T)+2X-1}
 \end{aligned}$$



vektorba<sup>7</sup> foglalni. A különböző korcsoport-időszak kombinációkhoz tartozó elméleti halálesi gyakoriságok függetlenségéből és a (6.1) összefüggésből adódóan a modell log-likelihood függvénye<sup>8</sup> Poisson-eloszlású halálesi gyakoriságok esetén

$$\ell(\zeta) = \sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T \chi_{xt} \left( -E_{xt}^c m_{xt}^c + D_{xt} (\ln E_{xt}^c + \ln m_{xt}^c) - \ln(D_{xt}!) \right), \quad (6.9)$$

ahol a (6.2) egyenlet alapján logaritmikus kapocsfüggvény mellett

$$m_{xt}^c = g^{-1}(\eta_{xt}) = e^{\eta_{xt}} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T),$$

binomiális eloszlású halálesi gyakoriságok esetén pedig

$$\ell(\zeta) = \sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T \chi_{xt} \left( \ln \left( \frac{E_{xt}^0}{D_{xt}} \right) + D_{xt} \ln m_{xt}^0 + (E_{xt}^0 - D_{xt}) \ln(1 - m_{xt}^0) \right), \quad (6.10)$$

ahol a (6.2) egyenlet alapján logit kapocsfüggvény esetén

$$m_{xt}^0 = g^{-1}(\eta_{xt}) = \frac{1}{1 + e^{-\eta_{xt}}} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T).$$

A kiválasztott modellspecifikációban elhagyandó paraméterek nulla értékére vonatkozó feltételeknek és az alkalmazott identifikációs megkötéseknek egyaránt eleget tevő, megengedett  $\zeta$  paramétervektorok halmazára olvashatósági szempontból hasznos bevezetni a

<sup>7</sup> A sortörések csupán az áttekinthetőséget szolgálják, valamint az  $N$  paramétert adottnak kell tekinteni.

<sup>8</sup> A (6.9) és (6.10) egyenletekben szereplő  $\chi_{xt}$  ( $x = 1, 2, \dots, X$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ ) bináris változók értéke 0, ha az adott korcsoport-időszak kombinációra nem áll rendelkezésre elegendő adat, és 1 egyébként. Cairns és szerzőtársai [2009] nyomán az elegendő adat kritériuma lehet, hogy az adott kohorszra legalább öt haláleset ismert legyen.

$Z \subseteq R^{(N+1)(X+T)+2X-1}$  jelölést. Ekkor az ismeretlen paramétervektor maximum likelihood becslőfüggvénye a

$$\hat{\zeta} = \arg \max_{\zeta \in Z} \ell(\zeta) \quad (6.11)$$

optimalizálási feladat megoldásaként nyerhető, melynek előállítása érdekében célszerű először elhagyni a (6.9) vagy a (6.10) log-likelihood függvényből a  $\zeta$  paramétervektortól nem függő tagokat. A (6.11) feladat egy speciális esetének megoldására Brouhns és szerzőtársai [2002a] a Newton-módszert alkalmazzák, amely a log-lineáris modellek paramétereinek becslésére is általánosan használatos, Villegas és szerzőtársai [2016] pedig az általánosított lineáris modell (GLM) illesztésére alkalmazható, számos statisztikai programcsomagba beépített optimalizáló algoritmusokat javasolják.

## 6.5. Modellválasztás és illeszkedés

### 6.5.1. Egymásba ágyazott modellek közötti választás

Két egymásba ágyazott modell esetén – vagyis amennyiben két modell közül az egyik a másikból paramétermegkötések segítségével származtatható – a modellek közötti választást elősegítő, a statisztikában közismert likelihood-arány tesztstatisztika képlete:

$$\chi^2 = 2(\ell(\hat{\zeta}_1) - \ell(\hat{\zeta}_0)), \quad (6.12)$$

ahol  $\hat{\zeta}_1$  és  $\hat{\zeta}_0$  a  $\zeta$  paramétervektor (6.11) összefüggés szerinti maximum likelihood becslőfüggvényei a bővebb, illetve a szűkebb modell-

ben. A (6.12) tesztstatisztika aszimptotikusan  $\chi^2$ -eloszlású  $\nu = K_1 - K_0$  szabadságfokkal, ahol  $K_1 \in \mathbb{N}$  és  $K_0 \in \mathbb{N}$  a bővebb, illetve a szűkebb modell effektív paramétereinek száma, azaz az adott modell paramétereinek száma és a paraméter-megkötések száma közötti különbség, valamint  $K_1 > K_0$ . Ha fennáll a

$$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(\nu)$$

összefüggés, ahol  $0 < \alpha < 1$  az alkalmazott szignifikanciaszint, valamint  $\chi^2_{1-\alpha}(\nu)$  a  $\nu$  szabadságfokú  $\chi^2$ -eloszlás  $1 - \alpha$  valószínűségi szinthez tartozó kvantilise, akkor a teszt alapján a bővebb modell alkalmazása javasolt a szűkebb modellel szemben.

Külön figyelmet érdemel az úgynevezett telített modell, amelyben a halálesetek számának elméleti várható értéke minden egyes korcsoport-időszak kombinációra megegyezik a tapasztalt értékkel:

$$\mathbb{E}(\hat{D}_{xt}) = D_{xt} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T). \quad (6.13)$$

E modell effektív paramétereinek száma a (6.9) vagy (6.10) képletben a becslés során figyelembe vett korcsoport-időszak kombinációk száma. Tehát ha az egymásba ágyazott modellek közül a bővebb modell a telített modell, akkor

$$K_1 = \sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T \chi_{xt}.$$

### 6.5.2. Egyedi, teljes és skálázott deviancia

Az egyes korcsoport-időszak kombinációkra egyenként egy adott GAPC modell illeszkedése az általánosított lineáris modellkeretben (GLM) használatos *egyedi deviancia* (angolul *deviance residual*) fogalmával mérhető. Az egyedi devianciák az adott modell és a (6.13) egyenlet által definiált telített modell közötti választást elősegítő likelihood-arány teszt keretében értelmezhetők, és ebben az esetben megegyeznek az egyes korcsoport-időszak kombinációk (6.12) tesztstatisztikához való hozzájárulásával.

Poisson-eloszlású halálesi gyakoriságok esetén az egyedi devianciák képlete a fentiek alapján a (6.9), (6.12) és (6.13) összefüggésekből származtatható:

$$\begin{aligned} dev_{xt} &= 2 \left( D_{xt} \ln \frac{D_{xt}}{E_{xt}^c m_{xt}} + E_{xt}^c m_{xt} - D_{xt} \right) \\ (x &= 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Binomiális eloszlású halálesi gyakoriságok esetén a megfelelő képlet:

$$\begin{aligned} dev_{xt} &= 2 \left( D_{xt} \ln \frac{D_{xt}}{E_{xt}^0 q_{xt}} + (E_{xt}^0 - D_{xt}) \ln \frac{E_{xt}^0 - D_{xt}}{E_{xt}^0 (1 - q_{xt})} \right) \\ (x &= 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T). \end{aligned} \quad (6.15)$$

A (6.14) vagy (6.15) összefüggésekben szereplő egyedi devianciák indikátorváltozókkal súlyozott összege adja a *teljes deviancia* (angolul *total deviance*) értékét, amely megegyezik az adott modell és a (6.13) egyenlet által definiált telített modell közötti választásra alkalmazható

likelihood-arány tesztstatisztika értékével:

$$Dev = \sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T \chi_{xt} dev_{xt}. \quad (6.16)$$

Az egyedi devianciák ismeretében a következő képlet alapján számíthatók ki az úgynevezett *skálázott egyedi devianciák* (angolul *scaled deviance residuals*):

$$sdev_{xt} = \text{sgn}(D_{xt} - \mathbb{E}(\tilde{D}_{xt})) \sqrt{\frac{dev_{xt}}{Dev}} \nu \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T),$$

ahol  $\nu = K_1 - K_0$  a (6.16) összefüggésbeli tesztstatisztika szabadságfokainak száma, továbbá  $K_0$  az illesztett modell,  $K_1 = \sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T \chi_{xt}$  pedig a telített modell effektív paramétereinek száma. Az egyedi devianciákkal ellentétben a skálázott devianciák a megfigyelt és becsült halálesi gyakoriságok közötti eltérés irányát és a paraméterek számát is figyelembe veszik.

### 6.5.3. Információs kritériumok

A parszimónia elve jegyében a modellválasztás során két azonos illeszkedést biztosító modell közül a kevesebb paramétert tartalmazó, a valóságot egyszerűbben leíró modellt célszerű előnyben részesíteni. Cairns és szerzőtársai [2009] a paraméterek számának indokolatlan emelkedését elkerülendő az egyéb statisztikai alkalmazásokban is népszerű, információelméletből származó Akaike (AIC) és bayes-i (BIC) *információs kritériumok* (angolul *information criteria*) használatát javasolják, me-

lyek képletei:

$$AIC = 2K_0 - 2\ell(\hat{\xi}),$$

$$BIC = K_0 \ln K_1 - 2\ell(\hat{\xi}),$$

ahol az eddigieknek megfelelően  $K_0$  az illesztett modell,  $K_1$  pedig a telített modell effektív paramétereinek száma.

Az AIC és BIC kritériumok konstrukciójából látható, hogy két illesztett modell közül az alacsonyabb információs kritériummal rendelkező változat használata célszerűbb. Fontos megjegyezni azonban, hogy e kritériumok segítségével az illesztett modellek illeszkedése abszolút értelemben nem tesztelhető: elképzelhető, hogy a fenti kritériumok által legjobbnak minősített modell illeszkedése is elfogadhatatlan. A 6.5.1 szakaszban bemutatott likelihood-arány tesztstatisztikával ellentétben az itt ismertetett információs kritériumok nem egymásba ágyazott modellek közötti választásra is használhatók.

## 6.6. A mortalitási indexek és a kohorszhatás időbeli alakulása

A 4.5. alfejezetben bemutatott kerethez hasonlóan a (6.3) egyenlet időtől függő paramétereinek alakulása idősoros modellek segítségével írható le és jelezhető előre.

### 6.6.1. Modellspecifikáció

A (6.3) egyenletbeli  $k_t^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ ) mortalitási indexek becsült értékeinek együttes alakulását Cairns–Blake–Dowd

[2006], Haberman–Renshaw [2011], valamint Villegas és szerzőtársai [2016] *többdimenziós eltolásos véletlen bolyongásként* (angolul *multivariate random walk with drift*) modellezzik.

A jelölés egyszerűsítése érdekében célszerű az  $N$  darab becsült mortalitási indexet időtől függő vektor formájában felírni:

$$\hat{\mathbf{k}}_t = \begin{bmatrix} \hat{k}_t^{(1)} \\ \hat{k}_t^{(2)} \\ \vdots \\ \hat{k}_t^{(N)} \end{bmatrix} \quad (t = 1, 2, \dots, T).$$

Ezzel a jelöléssel a többdimenziós eltolásos véletlen bolyongás alapján a becsült mortalitási indexek dinamikáját definiáló egyenlet:

$$\hat{\mathbf{k}}_t = \hat{\mathbf{k}}_{t-1} + \mathbf{s} + \boldsymbol{\phi}_t \quad (t = 2, 3, \dots, T), \quad (6.17)$$

ahol  $\hat{\mathbf{k}}_1 \in \mathbb{R}^N$  adott kezdőérték,  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^N$  az eltolás mértékét megadó trendparaméter, valamint  $\boldsymbol{\phi}_t$  a folyamat véletlen hibatagjait jelöli, melyek független,  $\mathbf{0}$  várható értékű, adott  $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  pozitív definit kovarianciamátrixú, többdimenziós normális eloszlású valószínűségi vektorok:

$$\boldsymbol{\phi}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (t = 2, 3, \dots, T), \quad (6.18)$$

továbbá függetlenek a (6.1) egyenletben szereplő elméleti haláleseti gyakoriságoktól is.

A (6.3) egyenletben szereplő  $c_j$  ( $j = 1-X, 2-X, \dots, T-1$ ) kohorszhatás becsült értékeinek alakulását szintén ARIMA modellek segítségével szokás modellezni. Renshaw–Haberman [2006] az eltolásos ARIMA(1, 1, 0)

modellt javasolják, mely így írható fel:<sup>9</sup>

$$\hat{c}_j = (1 + \gamma)\hat{c}_{j-1} - \gamma\hat{c}_{j-2} + s_c + \phi_j^{(c)} \quad (j = 3 - X, 4 - X, \dots, T - 1), \quad (6.19)$$

ahol  $\hat{c}_{1-X}$  és  $\hat{c}_{2-X}$  adott kezdőértékek,  $\gamma \in \mathbb{R}$  és  $s_c \in \mathbb{R}$  adott paraméterek, a  $\phi_j^{(c)}$  hibatagok pedig független, 0 várható értékű, azonos  $\sigma_c^2 > 0$  varianciájú, normális eloszlású valószínűségi változók:

$$\phi_j^{(c)} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_c^2) \quad (j = 3 - X, 4 - X, \dots, T - 1), \quad (6.20)$$

melyek függetlenek a (6.18) egyenletbeli hibavektoroktól és a (6.1) egyenletben szereplő elméleti halálesi gyakoriságoktól is.

### 6.6.2. A paraméterek becslése

A (6.17) egyenletet átrendezve a (6.18) összefüggésből adódik, hogy a becsült mortalitási indexvektor idősorának elsőrendű differenciái független, azonos paraméterű, többdimenziós normális eloszlású valószínűségi vektorok:

$$\hat{\mathbf{k}}_t - \hat{\mathbf{k}}_{t-1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{s}, \Sigma) \quad (t = 2, 3, \dots, T). \quad (6.21)$$

Így közös eloszlásuk várhatóérték-vektorának és kovarianciamátrixának maximum likelihood becselőfüggvényei a koordinátánkénti mintaátlagok

---

<sup>9</sup> Plat [2009] javaslata a hasonló, de általánosabb eltolásos ARIMA(2,2,0) modell, amelyben a  $c_{j-1}$  és  $c_{j-2}$  tagok együtthatói egymástól függetlenül megválaszthatók.



vektorával és a mintából becsült kovarianciamátrixszal egyenlők:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{s}} &= \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (\hat{\mathbf{k}}_t - \hat{\mathbf{k}}_{t-1}) = \frac{1}{T-1} (\hat{\mathbf{k}}_T - \hat{\mathbf{k}}_1), \\ \hat{\Sigma} &= \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (\hat{\mathbf{k}}_t - \hat{\mathbf{k}}_{t-1} - \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{k}}_t - \hat{\mathbf{k}}_{t-1} - \hat{\mathbf{s}})^T.\end{aligned}\quad (6.22)$$

Továbbá a kohorszhatás alakulását leíró (6.19) és (6.20) összefüggések-ből átrendezéssel és sztenderdizálással következik az alábbi reláció:

$$\hat{c}_j - \hat{c}_{j-1} - \gamma(\hat{c}_{j-1} - \hat{c}_{j-2}) \sim \mathcal{N}(s_c, \sigma_c^2) \quad (j = 3 - X, 4 - X, \dots, T - 1),$$

amelyből a  $\boldsymbol{\theta}_c^T = (\gamma, s_c, \sigma_c) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{>0} = \Theta_c$  paramétervektor függvényében felírható a kohorszhatás modelljének log-likelihood függvénye:

$$\begin{aligned}\ell_c(\boldsymbol{\theta}_c) &= \alpha - (X + T - 3) \ln \sigma_c \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma_c^2} \sum_{j=3-X}^{T-1} (\hat{c}_j - \hat{c}_{j-1} - \gamma(\hat{c}_{j-1} - \hat{c}_{j-2}) - s_c)^2,\end{aligned}\quad (6.23)$$

ahol  $\alpha = -\frac{X+T-3}{2} \ln(2\pi)$  konstans. A kohorszhatás paramétereinek maximum likelihood becslőfüggvényét ekkor a következő optimalizálási feladat megoldása szolgáltatja:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_c = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}_c \in \Theta_c} \ell_c(\boldsymbol{\theta}_c).$$

Mivel a (6.23) egyenlet jobb oldalán szereplő összeg regressziós eltérés-négyzetösszegként is felfogható, ezért a becslési feladat a közönséges legkisebb négyzetek módszerével is megoldható. Így a  $\hat{c}_j - \hat{c}_{j-1}$  elsőrendű differenciákat egy lineáris regressziós modellben saját elsőrendű késleltetett értékekkel és egy konstannsal magyarázva a paraméterek

maximum likelihood becslése a következő lesz:  $\hat{\gamma}$  a regressziós együttható,  $\hat{s}_c$  a regressziós konstans,  $\hat{\sigma}_c^2$  pedig a regresszió átlagos négyzetes hibája. Alternatív megoldásként a paraméterek becsült értékei a Yule–Walker egyenletek (lásd például Asteriou–Hall [2015]) segítségével is kiszámíthatók.

## 6.7. Előrejelzés

Az előző szakaszban ismertetett idősoros modellek felépítésének célja a GAPC modell időtől függő paramétereinek előrejelzése, melynek segítségével megbecsülhetők a jövőbeli halandósági ráták. Az áttekinthetőség kedvéért érdemes a pontbecslést és a bizonytalanságot is magába foglaló bootstrap becslést két külön szakaszban tárgyalni.

### 6.7.1. Pontbecslés

A mortalitási indexvektor jövőbeli értékeinek pontbecslései a már ismert értékeket adottnak tekintve a (6.21) összefüggés extrapolálásával nyerhetők:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{\mathbf{k}}_{T+j}) &= \mathbb{E}\left(\hat{\mathbf{k}}_T + \sum_{i=1}^j (\hat{\mathbf{k}}_{T+i} - \hat{\mathbf{k}}_{T+i-1})\right) = \\ &= \hat{\mathbf{k}}_T + \sum_{i=1}^j \mathbb{E}(\hat{\mathbf{k}}_{T+i} - \hat{\mathbf{k}}_{T+i-1}) = \hat{\mathbf{k}}_T + j\mathbf{s} \quad (j = 1, 2, \dots).\end{aligned}$$

Mivel a maximum likelihood becslés invariáns a paraméterek függvénytranszformációjára, ezért a (6.22) egyenlet behelyettesítésével adódik az alábbi maximum likelihood becslés a jövőbeli mortalitási indexvektorok

várható értékére:

$$\hat{\mathbb{E}}(\hat{\mathbf{k}}_{T+j}) = \hat{\mathbf{k}}_T + j\hat{\mathbf{s}} \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (6.24)$$

A kohorszhatás jövőbeli várható értékeinek pontbecslései a már ismert értékeket adottnak tekintve a (6.19) egyenlet rekurzív extrapolálásával számíthatók ki:

$$\hat{\mathbb{E}}(\hat{c}_{T-1+j}) = (1 + \hat{\gamma})\hat{\mathbb{E}}(\hat{c}_{T-2+j}) - \hat{\gamma}\hat{\mathbb{E}}(\hat{c}_{T-3+j}) + \hat{s}_c \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (6.25)$$

ahol  $\hat{\gamma}$  és  $\hat{s}_c$  a (6.23) log-likelihood függvény maximalizálása során nyert értékek.

A (6.24) és (6.25) egyenletek alapján nyert becsléseket a (6.3) összefüggésbe behelyettesítve jelezhető előre a GAPC model család szisztematikus komponense:

$$\hat{\eta}_{x,T+j} = \hat{a}_x + \sum_{i=1}^N \hat{b}_x^{(i)} \hat{\mathbb{E}}(\hat{k}_{T+j}^{(i)}) + \hat{b}_x^{(0)} \hat{\mathbb{E}}(\hat{c}_{T+j-x}) \quad (6.26)$$

$$(x = 1, 2, \dots, X, \quad j = 1, 2, \dots).$$

Végül a (6.2) és (6.26) egyenletek alapján nyerhetők a jövőbeli központi vagy kezdeti halandósági ráták pontbecslései:

$$\hat{m}_{x,T+j} = g^{-1}(\hat{\eta}_{x,T+j}) \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad j = 1, 2, \dots).$$

### 6.7.2. A bizonytalanság modellezése

A halandóság-előrejelző módszerek alkalmazásával járó *előrejelzési bizonytalanság* modellezésére Lee–Carter [1992] óta szokásos eljárás

a 6.7.1. szakaszban bemutatott pontbecslések alkalmazása helyett az időtől függő paraméterek hibatagjainak Monte Carlo szimulációja (Deák [1990]) segítségével előrejelzéseket készíteni. A GAPC modell keretében könnyedén készíthetők ilyen előrejelzések a (6.18) és (6.20) összefüggésekben szereplő hibatagok szimulációjával, a szimulált hibatagokat behelyettesítve az időtől függő paraméterek jövőbeli alakulását leíró egyenletekbe. Ez az eljárás ugyanakkor meglehetősen félrevezető eredményeket produkál, mivel a (6.3) egyenlet paramétereit implicit módon azok mintából becsült értékeivel azonosítja, figyelmen kívül hagyva ezáltal a paraméterbecslési eljárásból fakadó úgynevezett *paraméterbizonytalanságot*.<sup>10</sup>

A GAPC modellcsalád keretében az előrejelzési bizonytalanság és a paraméterbizonytalanság *együttesen* a Brouhns és szerzőtársai [2005], valamint Villegas és szerzőtársai [2016] által javasolt *félparaméteres bootstrap* (angolul *semiparametric bootstrap*) eljárás segítségével vehető figyelembe<sup>11</sup>, mivel analitikus módszerekkel a bizonytalanság két forrása nehezen kezelhető együttesen. Koissi és szerzőtársai [2006] alternatív megközelítésként a skálázott egyedi devianciákból vett mintavételezésen alapuló reziduális bootstrap módszert javasolják.

A Brouhns és szerzőtársai [2005] által javasolt félparaméteres bootstrap eljárás keretében a  $B \in \mathbb{N}_{>0}$  darab bootstrap mintában először a  $D_{xt}$  ( $x = 1, 2, \dots, X$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ ) ismert halálesi gyakoriságokat újra szükséges generálni a megfigyelt értékekkel azonos várható értékű Poisson vagy binomiális eloszlásokból, majd a modellillesztést

<sup>10</sup> Bár néphalandósági ráták előrejelzése esetén jellemzően a teljes népesség adatai ismertek, a sztochasztikus halandóság-előrejelző modellek a megfigyelt halandósági rátákat és halálesi gyakoriságokat elméleti valószínűségi változók megvalósult értékeinek tekintik, így az azok alapján becsült modellparaméterek maguk is bizonytalanok (valószínűségi változók).

<sup>11</sup> A bootstrap módszert Efron [1979] javasolta először általánosabb kontextusban.

és az előrejelzést minden egyes  $D_{xt}^b$  ( $b = 1, 2, \dots, B$ ,  $x = 1, 2, \dots, X$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ ) bootstrap mintára el kell végezni, a modellválasztási lépés nélkül, minden egyes mintára az eredetileg javasolt modellváltozatot alkalmazva. A vizsgálni kívánt véletlen mennyiségek (például halandósági ráták vagy várható élettartamok) elméleti eloszlása a mintaméret növelésével határértékben azok bootstrap mintákban megfigyelt empirikus eloszlásával közelíthető.

## 7. fejezet

### Esettanulmány:

# Élettartam-kockázat a nyugdíjcélú életjáradékok díjszámításában

A 7. fejezetben a Vékás [2016] tanulmányt ismertetem, melynek célja elsősorban Májer–Kovács [2011] az élettartam-kockázat szerepét vizsgáló cikkének módszertani továbbfejlesztése és aktualizálása. Elemzésemben a Májer–Kovács [2011] tanulmányában alkalmazott Lee–Carter [1992] modell keretein túllépve az általánosított korcsoport–időszak-kohorsz (GAPC) modelles család (Villegas és szerzőtársai [2016]) segítségével vizsgálom a nyugdíjcélú életjáradékok díjszámításában jelentkező élettartam-kockázatot.

Számításaimat az 1975–2014. naptári évek halandósági adataira alapozom, ezáltal a Májer–Kovács [2011] által alkalmazott, 1970–2006. éveket felölelő bázisidőszak alapján számított értékekhez képest jelentősen ma-

gasabb várható élettartamokat és nettó díjakat állapítok meg. A relatív alulárázottság emelkedésének bemutatása révén alátámasztom, hogy a járadékok díjszámításában nőtt az élettartam-kockázat szerepe, illetve az annak figyelmen kívül hagyásával elkövetethető hiba nagysága.

Öt nevezetes modell mintán kívül becsült előrejelzési pontossága alapján a nyugdíjcélú életjáradékokkal kapcsolatos elemzésemet a Cairns–Blake–Dowd [2006] modellre építem. Májer–Kovács [2011] cikke a Lee–Carter [1992] modell keretében figyelembe vette a mortalitási index sztochasztikus trendparaméterére vonatkozó bizonytalanságot. Ehhez képest lényeges módszertani újítás, hogy az itt bemutatandó elemzés a becslés során fellépő paraméterbizonytalanságot *valamennyi* paraméter kapcsán figyelembe veszi a bootstrap (Efron [1979]) eljárás segítségével, ezáltal pontosabb képet adva az aktuáriusi szempontból igen lényeges kockázat mértékéről.

A probléma aktualitását az önkéntes nyugdíjpénztári életjáradékokra vonatkozó szabályok módosítása (Országgyűlés [2015]) adja, melynek következtében a vizsgált téma gyakorlati jelentősége a közelmúltban jelentősen emelkedett.

## 7.1. A kérdés aktualitása

Az önkéntes nyugdíjpénztárakra vonatkozó korábbi szabályozás súlyos hiányossága volt, hogy a nyugdíjkorhatár betöltésekor a pénztárak nem voltak kötelesek a felhalmozott vagyon ellenében életjáradékot szolgáltatni a pénztártagok részére, még az ügyfél kifejezett kérésére sem. Így a pénztártagok nyugdíjas éveik biztosítására csupán *banktechnikai járadékot* igényelhettek. E konstrukció keretében a pénztártagok vagy örö-

köseik egy határozott tartam erejéig részesültek rendszeres járadékban. A banktechnikai járadék valójában nyugdíjcélra teljességgel alkalmatlan, mivel egyrészt a határozott tartam letelte után az ügyfelek anyagi biztonságát már nem garantálja, másrészt szolgáltatása a tartam végéig a pénztártag esetleges halála esetén is fennmarad, melynek következtében díja jóval magasabb annál, mint amit a nyugdíjcélú felhasználás indokolna.

Ezt a helyzetet orvosolja a 2015 decemberében elfogadott új pénztári szabályozás (Országgyűlés [2015]), melynek értelmében a legalább ezer tagot számláló önkéntes nyugdíjpénztárok – a tagok erre vonatkozó nyilatkozata esetén, a felhalmozott pénztári vagyonért cserébe – a nyugdíjkorhatár betöltését követően kötelesek valamely életbiztosító társaságnál *életjáradékot* vásárolni a tagok részére. Az életjáradék a banktechnikai járadékkal ellentétben a tulajdonosa élete végéig biztosít rendszeres kifizetéseket. Az intézkedés új lendületet adhat az életjáradékok pangó hazai piacának. Ezzel párhuzamosan várhatóan előtérbe kerül az – életjáradékok esetén kiemelt jelentőségű – élettartam-kockázat problémája, amely az életkorfüggő halandósági ráták időbeli csökkenéséből fakad.

Az életjáradékok díjszámítása során az aktuáriusi szakma hagyományosan az egy bizonyos naptári évre vonatkozó halandósági táblákra támaszkodik, feltételezve, hogy a díjkalkulációhoz felhasznált koréves halálozási valószínűségek a jövőben változatlanok maradnak. A halandósági ráták időbeli csökkenése következtében így az életjáradékok tulajdonosai a kalkuláltnál nagyobb valószínűséggel érik meg a járadékfizetési időpontokat, ami előre nem kalkulált veszteséget jelent a járadékszolgáltatóknak. A probléma többek között a jövőbeli naptá-



ri évekre vonatkozó koréves halálozási valószínűségek minél pontosabb előrejelzésével orvosolható.

## 7.2. Adatok és módszerek

A nyugdíjas korú egyének halandósági rátáinak előrejelzése érdekében a KSH 1975–2014. naptári évekre és 65–99 korévekre vonatkozó, naptári és korévek szerint bontott létszám- és halálozási adatait használtam fel.<sup>1</sup> Mivel az Európai Unió erre vonatkozó irányelve (EU [2004]) értelmében a járadékbiztosítások díjkalkulációjában tilos a nemek szerinti megkülönböztetés, ezért a nemenkénti adatokat aggregáltam, és a számításokat a nemtől független (uniszex) korévenkénti létszámok és halálesi gyakoriságok alapján végeztem el.

A halandósági ráták előrejelzésére a GAPC model családba tartozó, a 6.1. ábrán korábban szemléltetett korcsoport–időszak–kohorsz (APC, Carstensen [2007]), Cairns–Blake–Dowd [2006](CBD), Poisson Lee–Carter (LC, Brouhns és szerzőtársai [2002a]) és időskori Plat [2009] modelleket, valamint a Renshaw–Haberman [2006] (RH) modell Haberman–Renshaw [2011] cikkében szereplő, egyszerűsített változatát alkalmaztam.<sup>2</sup> A számításokat az R statisztikai programcsomag (R [2008]) és a StMoMo sztochasztikus halandóság-előrejelző függvénykönyvtár (Villegas és szerzőtársai [2016]) segítségével végeztem el.

---

<sup>1</sup> Banyár [2012] műve részletesen foglalkozik a járadékok díjszámításához használható halandósági tábla kiválasztásának kérdésével. Járadékszolgáltatók egyedi halandósági adatai híján itt kénytelen vagyok a néphalandósági adatokból kiindulni.

<sup>2</sup> Bár a Booth–MainDonald–Smith [2002] tanulmányában ismertetett többtényezős Lee–Carter modell Poisson-változata is a GAPC model család tagja, ezt nem illesztettem az előrejelzéssel járó módszertani nehézségek miatt. Girosi–King [2007] alapján egyébként Magyarországon az egytényezős modell által megmagyarázott variancia hányada 85% az 51 dimenziós térben, vagyis az egytényezős modell alkalmazása viszonylag kis információvesztéssel jár.

A legjobb mintán kívüli előrejelzési teljesítményt nyújtó modell kiválasztása és a túlillesztés elkerülése érdekében az 1975–2014. naptári éveket az 1975–2004. naptári éveket magába foglaló *tanuló* és az 2005–2014. naptári éveket felölelő *tesztelő időszakra* osztottam fel. A felsorolt öt modell paramétereinek becslését a tanuló időszakon, illeszkedésük vizsgálatát pedig – a 3.3.5. szakaszban bemutatott módszertan segítségével – a tesztelő időszakon végeztem el.

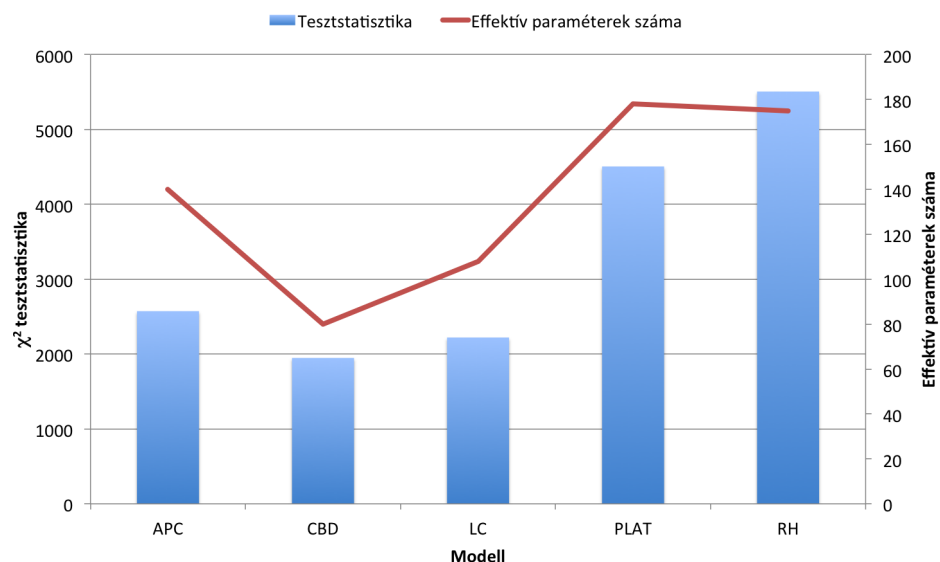
A tesztelés során az első húsz korévet (vagyis a 65–84 évesek adatait) vettem figyelembe, mivel a későbbi korévek egyrészt már kevésbé relevánsak a hozzájuk tartozó alacsonyabb túlélési valószínűségek és a járadékok díjszámítása során alkalmazott diszkontálás miatt, másrészt az azokban megfigyelt halandósági ráták alakulása az alacsony létszámok miatt nem kellőképpen megbízható. Ennek tudható be, hogy a KSH nyers halálozási valószínűségeket ezekre a korévekre nem is közöl, csak a Gompertz-Makeham formula alapján kiegyenlített értékeket publikálja.<sup>3</sup>

A tesztek eredményeit és az illesztett modellek effektív paramétereinek számát a 7.1. ábra<sup>4</sup> szemlélteti, melynek alapján a tesztelő időszakon a legjobb előrejelzési teljesítményt a kifejezetten az időskori halandóság előrejelzésére kifejlesztett Cairns–Blake–Dowd modell nyújtja, melyet illeszkedés szerinti sorrendben a Poisson Lee–Carter és a

---

<sup>3</sup> A jövőben várhatóan megbízhatóbbá válnak a 84 éves kor feletti halandósági adatok az idősök arányának és ezáltal az érintett csoportok létszámának rohamos növekedése miatt. Ekkor biztosabban eldőlhet, hogy a legmagasabb életkorokban vajon konkávvá válik-e az életkorfüggő halandósági görbe, vagy Gavrilov–Gavrilova [2011] álláspontja a helytálló, akik szerint ezekben az életkorokban is megfelelő a KSH által is alkalmazott konvex görbe feltételezése, illetve a konkavítás korábbi észlelései adathiányból és adathibákból eredtek.

<sup>4</sup> Az alacsonyabb  $\chi^2$  tesztstatisztikák utalnak jobb illeszkedésre. Az országos létszámadatok használatából adódó nagy mintaméret miatt az illeszkedésre vonatkozó nullhipotézis valamennyi modell esetén határozottan elutasítható. Effektív paraméterszám alatt a többi paraméter által az identifikációs megkötések révén nem meghatározott paraméterek száma értendő.



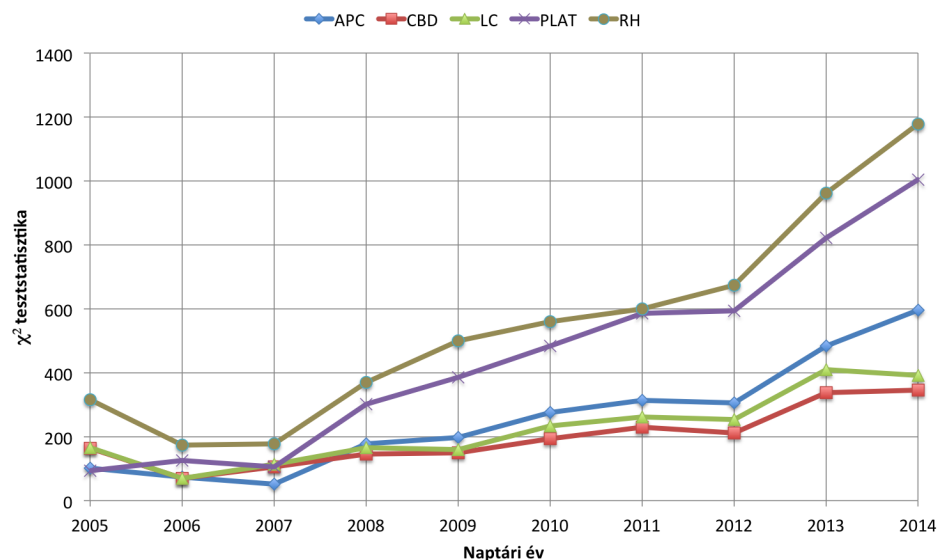
7.1. ábra. GPEC modellek illeszkedése a tesztidőszakon és a modellek effektív paraméterek száma (2005–2014, 65–84 éves korokban, forrás: saját szerkesztés)

korcsoport–időszak–kohorsz modellek követnek. Az illeszkedés alapján felállított rangsort az első három modelltől leszakadva a Plat és Renshaw–Haberman modellek zárják.

A Cairns–Blake–Dowd modell jó teljesítménye annál is figyelemre méltóbb, hogy ez az eljárás a vizsgált öt modell közül a legkevesebb effektív paraméterrel rendelkezik. A 7.1. ábrán megfigyelhető, hogy a magasabb effektív paraméterszámú modellek gyengébb előrejelzési pontosságot nyújtanak. A látszólagos ellentmondás oka, hogy a bonyolultabb modellek használata esetén a *túlillesztés* jelensége lép fel: ezek a modellek a kevesebb paramétert tartalmazó modelleknél szükségerően jobban illeszkednek a tanuló időszak adataira, ugyanakkor a tesztelő időszak éveire már gyengébb előrejelzést eredményeznek, hasonlóan ahhoz a tankönyvi elrettentő példához, mint amikor egy tapasztalatlan elemző a tanuló időszakon mért illeszkedéstől félrevezetve egy időben közel lineáris egyváltozós idősort magas fokszámú polinommal jelez előre.

Érdemes megjegyezni, hogy a vizsgált adatokon a 6.5.3. szakaszban bemutatott Akaike és bayes-i információs kritériumok alapján – a mintán kívüli teljesítmény alapján felállított rangsorral ellentétesen – a magasabb effektív paraméterszámú modellek használata lenne indokolt. Ez annak tudható be, hogy bár ezek a mutatók büntetik a paraméterszám indokolatlan emelkedését, mégis csupán a tanuló időszakon tapasztalt illeszkedést számszerűsítik, miközben lényegében semmit nem mondanak arról, hogy az adott modell valóban plauzibilis előrejelzést nyújt-e a jövőre nézve.

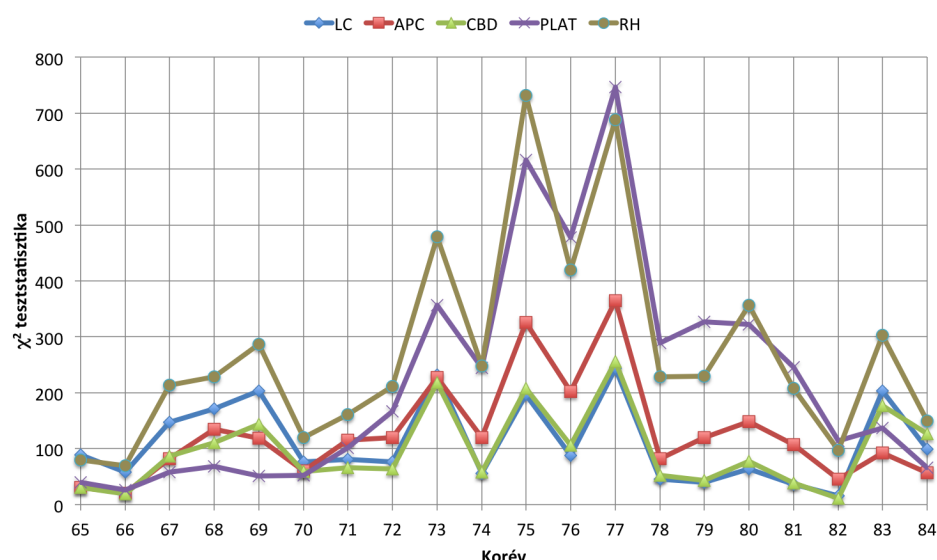
Hogy fényt derítsek az egyes modellek előrejelzési hibáinak természetére, az illeszkedés vizsgálatát a 65–84 éves életkorokban korévenként és az előrejelzési időszak éveire naptári évenként bontva is elvégeztem. Az eredményeket a 7.2. és 7.3. ábrák szemléltetik.



7.2. ábra. GAPC modellek illeszkedése a tesztidőszakon naptári évenként (2004–2013, 65–84 éves korokban, forrás: saját szerkesztés)

A 7.2. ábra alapján az előrejelzési időtáv növekedésével jellemzően va-

lamennyi vizsgált modell előrejelzési pontossága csökken. A pontosság romlása üteme a magas effektív paraméterszámú Plat és Renshaw–Haberman modellek esetén a legszembetűnőbb, illetve ezekkel szemben a legjobb illeszkedést nyújtó Cairns–Blake–Dowd és Poisson Lee–Carter modellek esetén a legmérsékeltebb. A naptári évenkénti elemzés megerősíti a Cairns–Blake–Dowd modell alkalmazhatóságát, annál is inkább, mivel a továbbiakban az életjáradékok díjszámítása az itt bemutatottnál jóval hosszabb, 35 éves előrejelzési horizont használatát teszi majd szükségessé.



7.3. ábra. GAPC modellek illeszkedésének összehasonlítása a teszt-időszakon korévenként (2004–2013, 65–84 éves korokban, forrás: saját szerkesztés)

A 7.3. ábra alapján egyik vizsgált modell esetén sem figyelhető meg életkor szerint monoton trend az előrejelzési pontosságban. A legpontosabbnak ítélt Cairns–Blake–Dowd és Poisson Lee–Carter modellek közötti fő különbség e tekintetben a 65–70 év közötti életkorokban figyelhető meg: itt a Cairns–Blake–Dowd modell érezhetően pontosabb előrejelzést szolgáltat. 72 éves kortól kezdve a két modell pontossága

közel azonos. A 73–77 év közötti életkorokban valamennyi modell a többi vizsgált életkorhoz képest viszonylag gyengén teljesít.

Az eredmények alapján összességében megállapítható, hogy a vizsgált adatsoron a hazai időskori halandóság előrejelzésére az öt kiválasztott GAPC modell közül a Cairns–Blake–Dowd modell használata javasolt. E modell mellett szól, hogy a legalacsonyabb mintán kívüli előrejelzési hibával és emellett a legkevesebb effektív paraméterrel rendelkezik, előrejelzési hibája a legalacsonyabb ütemben emelkedik az időhorizont növelésével, valamint az életjáradékok díjszámításánál leglényegesebb, 65–70 év közötti életkorok halandóságát a Poisson Lee–Carter modellhez képest jóval alacsonyabb hibával jelzi előre a tesztelő időszakon. Nem mellékes szempont az sem, hogy Cairns–Blake–Dowd [2006] cikkükben a modellt kifejezetten az időskori halandóság előrejelzésére javasolják a Lee–Carter modell alternatívájaként.

### 7.3. Életjáradékok statikus és dinamikus díjszámítása

Az  $x$  éves korú biztosított azonnal induló, élethosszig tartó, évi egy forint összegű életjáradékának egyszeri nettó díjképlete az aktuáriusi ekvivalenciaelv (Banyár [2003]) alapján:<sup>5</sup>

$$\ddot{a}_x = \sum_{i=0}^{\omega-x} \left( v^i \prod_{j=0}^{i-1} (1 - q_{x+j}) \right) \quad (x = 0, 1, \dots, \omega), \quad (7.1)$$

ahol  $\omega$  a feltételezett legmagasabb elérhető életkor (a KSH gyakorlata alapján  $\omega = 100$  év),  $v$  a technikai kamatláb alapján számított éves

---

<sup>5</sup> A képletben az üres szorzat értéke definíció szerint egynek tekintendő.

diszkonttényező<sup>6</sup>, a  $q_x$  ( $x = 0, 1, \dots, \omega - 1$ ) értékek pedig a koréves halálozási valószínűségek.

A (7.1) összefüggés szerinti nettó díj azt az életjáradékért cserébe nyújtandó összegű befizetést adja meg, amely mellett a járadékszolgáltató a technikai kamatlábnak megfelelő, rögzített éves befektetési hozam feltételezése mellett, a járadékfizetésen kívüli egyéb költségek figyelembe vétele nélkül nulla profitot realizál. Az életjáradék bruttó díja (Banyár [2003]) a (7.1) összefüggés szerinti nettó díj és a tényleges éves életjáradék összegének szorzata, növelve a költségek és a szolgáltatói profit fedezetével.<sup>7</sup>

A 7.1. összefüggés a klasszikus aktuáriusi díjszámításban érvényes statikus halandósági ráták feltételezése mellett helytálló. Ezzel szemben a halandóság-előrejelző módszerek segítségével előállítható, időben változó, dinamikus halandósági tábla használata esetén a számítások során az életkor növekedésével a naptári idő múlását is figyelembe kell venni. Ekkor a 7.1. összefüggés a következőképpen módosul:

$$\ddot{a}_x = \sum_{i=0}^{\omega-x} \left( v^i \prod_{j=0}^{i-1} (1 - q_{x+j, T+j}) \right) \quad (x = 0, 1, \dots, \omega),$$

ahol  $q_{xt}$  ( $x = 0, 1, \dots, \omega - 1$ ,  $t = T, T + 1, T + 2, \dots$ ) az  $x$  éves egyének koréves halálozási valószínűsége a  $t$ -edik naptári évben, valamint  $T$  az aktuális naptári év a díjszámítás pillanatában.

Az  $x$  éves korban várható hátralévő élettartamot statikus halandóság

<sup>6</sup> A technikai kamatláb a befektetett életbiztosítási díjtartalékon garantált éves hozamráta, melynek segítségével az aktuárius az életbiztosítások klasszikus díjkalkulációja során meghatározza a jövőbeli pénzáramlások jelenértékét (Banyár [2003]).

<sup>7</sup> Az életjáradékok kifizetései általában évesnél sűrűbb (például havi) gyakoriságúak. Mivel az évesnél sűrűbb járadékfizetési gyakoriság hatása az életjáradék nettó díjára jellemzően csekély, illetve a nettó díjjal közelítőleg arányos, ezért annak figyelembe vételétől itt eltekintek.

mellett megadó (3.11) összefüggés így is felírható:

$$e_x = \sum_{i=1}^{\omega-x} \prod_{j=0}^{i-1} (1 - q_{x+j}) + \frac{1}{2} \quad (x = 0, 1, \dots, \omega).$$

A megfelelő összefüggés dinamikus halandóság esetén:

$$e_x = \sum_{i=1}^{\omega-x} \prod_{j=0}^{i-1} (1 - q_{x+j, T+j}) + \frac{1}{2} \quad (x = 0, 1, \dots, \omega).$$

## 7.4. Eredmények

Az élettartam-kockázat szerepének számszerűsítése érdekében elsőként a 65–99 éves egyének életkorfüggő halandósági rátáit a GAPC modell-családba tartozó, korábban már bemutatott öt nevezetes halandóság-előrejelző modell felhasználásával a 2016–2050. naptári évekre előre jeleztem, majd a számításokat a Villegas és szerzőtársai [2016] tanulmányában javasolt félparaméteres bootstrap eljárás segítségével egyenként 5000 replikációból<sup>8</sup> álló bootstrap mintákon is megismételtem. A jövőbeli koréves halálozási valószínűségeket a kezdeti halandósági ráták értékeivel becsültem, és a nyugdíjkorhatár betöltésekor várható  $e_{65}$  hátralévő élettartam és  $\ddot{a}_{65}$  egyszeri nettó díj értékeket a várható értékek alapján számított pontbecslések alapján, illetve valamennyi szimulált bootstrap mintában egyenként is meghatároztam. Az összehasonlítás kedvéért a legfrissebb ismert, 2014. évi néphalandósági tábla alapján – a klasszikus aktuáriusi gyakorlat szerinti időben változatlan, statikus halandósági rátákat feltételezve – is elvégeztem a számításokat. Mivel a technikai kamatláb maximális mértéke az azt szabályozó MNB rendelet

<sup>8</sup> A bootstrap minták számának növelése 5000 replikáció felett már csak elhanyagolható mértékben változtatta meg a számított konfidenciaintervallumok határait.



(MNB [2015]) alapján forintban fennálló kötelezettségek esetén 2016. július 1-étől évi 2,3%, ezért a számítások során az  $v = \frac{1}{1,023}$  diszkonttényezőt alkalmaztam. További összehasonlításra adtak lehetőséget a Májer–Kovács [2011] tanulmányában bemutatott eredmények, melyek a Lee–Carter [1992] modell és az 1970–2006 bázisidőszak alapján, 3%-os technikai kamatláb feltételezésével készültek.

A Cairns–Blake–Dowd modell alapján nyert számítási eredményeimet és a Májer–Kovács [2011] cikkében szereplő megfelelő mutatószámokat ebben a sorrendben a 7.1. táblázat felső és alsó része foglalja össze. A táblázat második oszlopában a legutolsó ismert halandósági tábla alapján számított keresztmetszeti értékek, harmadik oszlopában a halandóság-előrejelzés segítségével nyert dinamikus, kohorszszemléletű várható értékek és bootstrap konfidenciaintervallumok, negyedik oszlopában pedig a statikus, keresztmetszeti szemléletben a dinamikus várható értékekhez képest elkövetett százalékos hibák nagyságai láthatók.

**Saját számítás** (bázisidőszak: 1975–2014):

Mennyiség	Keresztmetszeti	Várható érték (konf.int.)	Statikus hiba
$e_{65}$ (év)	16,47	18,21 (16,61; 19,80)	-9,51%
$\ddot{a}_{65}$ (Ft)	13,72	14,78 (13,83; 15,72)	-6,43%

**Májer–Kovács [2011]** (bázisidőszak: 1970–2006):

Mennyiség	Keresztmetszeti	Várható érték (konf.int.)	Statikus hiba
$e_{65}$ (év)	15,39	16,43 (15,12; 17,83)	-6,33%
$\ddot{a}_{65}$ (Ft)	11,87	12,43 (11,70; 13,17)	-4,50%

7.1. táblázat. Összehasonlítás: a 65 éves korban várható hátralévő élettartam és az életjáradék egyszeri nettó díja (forrás: saját számítás és Májer–Kovács [2011])

A 7.1. táblázat alapján megállapítható, hogy a statikus, keresztmetszeti szemléletben számított 65 éves korban várható hátralévő élettart-

tam 2006–2014 között 1,08 évvel, a nyugdíjcélú életjáradék egyszeri nettó díja pedig 1,85 Ft-tal emelkedett. Ez utóbbi hatás részben a várható élettartam növekedésének, részben pedig a technikai kamatláb csökkenésének tudható be. Az újabb számításaim alapján már az élettartam-kockázatot figyelmen kívül hagyó, keresztmetszeti értékek is meghaladják a Májer–Kovács [2011] által közölt kohorszszemléletű, dinamikus várható értékeket. Az új számítás alapján a dinamikus értékek konfidenciaintervallumai jóval szélesebbek a Májer–Kovács [2011] tanulmányában szereplő megfelelőikhez képest, mivel az utóbbiak – az új számítás során alkalmazott bootstrap eljárással szemben – a mortalitási index sztochasztikus trendparaméterét leszámítva nem tartalmazzák a paraméterbecslésből fakadó bizonytalanságot.<sup>9</sup>

A naiv, statikus szemlélet alkalmazásával elkövetett százalékos hiba nagysága mind a várható hátralévő élettartam, mind az életjáradék nettó díja esetén közel másfélszerese a Májer–Kovács [2011] eredményei alapján számított százalékos hibának, ami a módszertani különbségeken túl is arra enged következtetni, hogy az élettartam-kockázat jelentősége nőtt a 2006 és 2014 közötti időszakban. A statikus megközelítés a nyugdíjazáskor várható hátralévő élettartamot közel két évvel alábecsüli, és a nyugdíjcélú életjáradékok esetén 6,43%-os alulárázottsághoz vezet, ami például évi 1 millió Ft összegű járadék esetén a szerződés megkötésekor 1 millió 60 ezer Ft<sup>10</sup> tartalékhiányt, és ezáltal ugyanekkora nagyságú azonnali veszteséget jelent a járadékszolgáltató számára. E veszteség a biztosítási gyakorlatban is igen jelentős, így a statikus szem-

---

<sup>9</sup> Érdemes megjegyezni, hogy a Lee–Carter [1992] modell használata az újabb adatokon minimális eltéréssel a Cairns–Blake–Dowd [2006] modellel közel azonos eredményt ad, így a különbség nem a módszerválasztásból adódik.

<sup>10</sup> A veszteség a megfelelő nettó díjak eltérése és az éves járadéktag szorzataként kapható meg (Banyár [2003]).

lélet egyre kevésbé megengedhető, és egyre nagyobb hangsúlyt szükséges fordítani az élettartam-kockázat megfelelő modellezésére, hogy a biztosítók és nyugdíjpénztárak megfelelően készülhessenek fel az önkéntes nyugdíjpénztári életjáradékok nyújtására és a Szolvencia II keretrendszer alkalmazására. A halandóság-előrejelző módszereket minden eddiginél egységesebben és áttekinthetőbben magába foglaló GAPC modelles család alkalmazása és az előrejelzési bizonytalanság módszertani szempontból adekvát figyelembe vétele elősegítheti ezt a munkát.

# Irodalomjegyzék

Ágoston, K. Cs. (2001). Comparison of estimators for probability of death used in actuarial science. *Statisztikai Szemle*, 79(különszám):150–160. [http://www.ksh.hu/statszemle\\_archive/2001/2001\\_K6/2001\\_K6\\_150.pdf](http://www.ksh.hu/statszemle_archive/2001/2001_K6/2001_K6_150.pdf), letöltés dátuma: 2016.08.19.

Ágoston, K. Cs. (2003). Halálozási valószínűségek, illetve becslésük. In *Banyár, J.: Életbiztosítás (Függelék, pp. 377–390.)*. Aula Kiadó, Budapest. ISBN 9789639478381.

Ágoston, K. Cs. & Kovács, E. (2000). *Halandósági modellek*. Aktuárius jegyzetek, 3. kötet, Budapest. [http://www.uni-corvinus.hu/fileadmin/user\\_upload/hu/tanszekek/kozgazdasagtudomanyi/tsz-opkut/files/opkut/files/halandosagi\\_modellek.pdf](http://www.uni-corvinus.hu/fileadmin/user_upload/hu/tanszekek/kozgazdasagtudomanyi/tsz-opkut/files/opkut/files/halandosagi_modellek.pdf), letöltés dátuma: 2016.08.19.

Alai, D.H., Arnold-Gaille, S. & Sherris, M. (2015). Modelling cause-of-death mortality and the impact of cause-elimination. *Annals of Actuarial Science*, 9(1):167–186. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2233693>.

Andreozzi, L., Blaconá, M.T. & Arnesi, N. (2011). The Lee Carter method for estimating and forecasting mortality: an application for Argentina. *Working Paper, School of Statistics, National*

- University of Rosario*. <https://forecasters.org/submissions/ANDREOZZILUCIAISF2011.pdf>, letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Arató, M., Bozsó, D., Elek, P. & Zempléni, A. (2009). Forecasting and Simulating Mortality Tables. *Mathematical and Computer Modelling*, 49(3–4):805–813. <http://dx.doi.org/10.1016/j.mcm.2008.01.012>.
- Arató, M., Dryden, I.L. & Taylor, C.C. (2006). Hierarchical Bayesian modelling of spatial age-dependent mortality. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(2):1347–1363. <http://dx.doi.org/10.1016/j.csda.2006.02.007>.
- Arnold-Gaille, S. & Sherris, M. (2016). International Cause-Specific Mortality Rates: New Insights from a Cointegration Analysis. *ASTIN Bulletin*, 46(1):9–38. <http://dx.doi.org/10.1017/asb.2015.24>.
- Asteriou, D. & Hall, S. G. (2015). *Applied Econometrics (3rd edition, Part V, Chapter 13: ARIMA Models and the Box–Jenkins Methodology)*. Palgrave MacMillan, London. ISBN 9781137415479.
- Babel, B., Bomsdorf, E. & Schmidt, R. (2008). Forecasting German mortality using panel data procedures. *Journal of Population Economics*, 21(3):541–555. <http://dx.doi.org/10.1007/s00148-006-0097-4>.
- Bajkó, A., Maknics, A., Tóth, K. & Vékás, P. (2015). A magyar nyugdírendszer fenntarthatóságáról. *Közgazdasági Szemle*, 62(12):1229–1257. <http://dx.doi.org/10.18414/kszo.2015.12.1229>.
- Banyár, J. (2003). *Életbiztosítás*. Aula Kiadó, Budapest. ISBN 9789639478381.

- Banyár, J. (2012). *A kötelező öregségi életjáradékok lehetséges modelljei*. Társadalombiztosítási könyvtár. Gondolat Kiadó, Budapest. ISBN 9789636934224.
- Banyár, J. (2014). A modern nyugdíjrendszer kialakulásának két története. *Hitelintézeti Szemle*, 13(4):154–179. <http://www.hitelintezetiszemle.hu/letoltes/7-banyar-2.pdf>, letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Banyár, J. & Vékás, P. (2016). A pénzügyi termékek ára. *Közgazdasági Szemle*, 63(4):380–406. <http://dx.doi.org/10.18414/kszh.2016.4.380>.
- Baran, S., Gáll, J., Ispány, M. & Pap, G. (2007). Forecasting Hungarian mortality rates using the Lee–Carter method. *Acta Oeconomica*, 57:21–34. <http://dx.doi.org/10.1556/aoecon.57.2007.1.3>.
- Bauer, D., Börger, M. & Russ, J. (2010). On the pricing of longevity-linked securities. *Insurance: Mathematics and Economics*, 46:139–149. <http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2009.06.005>.
- Benjamin, B. & Pollard, J.H. (1993). *The Analysis of Mortality and other Actuarial Statistics (3rd edition)*. Institute and Faculty of Actuaries, Oxford. ISBN 978-0901066268.
- Berde, É. & Németh, P. (2015a). A termékenységi arányszám kiszámításának különböző módszerei. *Közgazdaság*, 10(2):121–137. <http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/2039/>, letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Berde, É. & Németh, P. (2015b). Adjusted Czech, Hungarian and Slovak Fertility Rates Compared with the Traditional Total Fertility Rate. *Statisztikai Szemle*, 93:(különszám):87–107. <http://www.ksh.hu/>

statszemle\_archive/2015/2015\_K19/2015\_K19\_087.pdf, letöltés dátuma: 2016.08.19.

Blake, D., Cairns, A., Dowd, K. & MacMinn, R. (2006). Longevity Bonds: Financial Engineering, Valuation, and Hedging. *Journal of Risk and Insurance*, 73:647–672. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1539-6975.2006.00193.x>.

Booth, H. & Tickle, L. (2008). Mortality modelling and forecasting: A review of methods. *ADSRI Working Paper No. 3, Australian Demographic & Social Research Institute, Canberra*. <http://demography.anu.edu.au/sites/default/files/publications/adsri-papers/ADSRIwp-03.pdf>, letöltés dátuma: 2016.08.19.

Booth, H., Hyndman, R.J., Tickle, L. & De Jong, P. (2006). Lee–Carter mortality forecasting: A multi-country comparison of variants and extensions. *Demographic Research*, 15(9):289–310. <http://dx.doi.org/10.4054/demres.2006.15.9>.

Booth, H., Maindonald J. & Smith, L. (2002). Applying Lee–Carter under Conditions of Variable Mortality Decline. *Population Studies*, 56(3):325–336. <http://dx.doi.org/10.1080/00324720215935>.

Börger, M. (2010). Deterministic shock vs. stochastic value-at-risk – an analysis of the Solvency II standard model approach to longevity risk. *Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik*, 31(2):225–259. <http://dx.doi.org/10.1007/s11857-010-0125-z>.

Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A. & Nesbitt, C.J.

- (1997). *Actuarial Mathematics (2nd edition)*. Society of Actuaries, Itasca, Illinois. ISBN 978-0938959465.
- Brouhns, N., Denuit, M. & Van Keilegom, I. (2005). Bootstrapping the Poisson log-bilinear model for mortality forecasting. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2005(3):212–224. <http://dx.doi.org/10.1080/03461230510009754>.
- Brouhns, N., Denuit, M. & Vermunt, J.K. (2002a). A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31:373–393. [http://dx.doi.org/10.1016/s0167-6687\(02\)00185-3](http://dx.doi.org/10.1016/s0167-6687(02)00185-3).
- Brouhns, N., Denuit, M. & Vermunt, J.K. (2002b). Measuring the Longevity Risk in Mortality Projections. *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, 2:105–130. <https://pure.uvt.nl/ws/files/510433/brouhns2002.pdf>, letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Cairns, A. J. G., Blake, D. & Dowd, K. (2006). A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration. *Journal of Risk and Insurance*, 73(4):687–718. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1539-6975.2006.00195.x>.
- Cairns, A. J. G., Blake, D. & Dowd, K. (2008). The Birth of the Life Market. *Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance*, 3:6–36. <http://dx.doi.org/10.2202/2153-3792.1027>.
- Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., Ong, A. & Balevich, I. (2009). A Quantitative Comparison of Stochastic Mortality Models Using Data From England and Wales and



- the United States. *North American Actuarial Journal*, 13(1):1–35. <http://dx.doi.org/10.1080/10920277.2009.10597538>.
- Cairns, A.J.G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G.D. & Khalaf-Allah, M. (2011). Bayesian Stochastic Mortality Modelling for Two Populations. *ASTIN Bulletin*, 41(1):29–59. <http://www.macs.hw.ac.uk/~andrewc/papers/astin2011.pdf>, letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Carnes, B.A. & Olshansky, S.J. (2007). A Realist View of Aging, Mortality, and Future Longevity. *Population and Development Review*, 33(2):367–381. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1728-4457.2007.00172.x>.
- Carstensen, B. (2007). Age–period–cohort models for the Lexis diagram. *Statistics in Medicine*, 26:3018–3045. <http://dx.doi.org/10.1002/sim.2764>.
- Coelho, E. (2001). The Lee–Carter Method for Forecasting Mortality – The Portuguese experience. *Working paper of the Portuguese National Statistical Institute, Lisbon*. [https://www.researchgate.net/publication/239545896\\_The\\_Portuguese\\_experience](https://www.researchgate.net/publication/239545896_The_Portuguese_experience), letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Currie, I. (2016). On fitting generalized linear and non-linear models of mortality. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2016(4):356–383. <http://dx.doi.org/10.1080/03461238.2014.928230>.
- Currie, I.D., Durban, M. & Eilers, P.H.C. (2004). Smoothing and forecasting mortality rates. *Statistical Modelling*, 4:279–298. <http://dx.doi.org/10.1191/1471082x04st080oa>.

de Moivre, A. (1752). *Annuities on Lives: With Several Tables, Exhibiting at One View, the Values of Lives, for Different Rates of Interest. Fourth Edition, in which are Added, Tables for Three and Three and a Half Per Cent.* A. Millar, Oxford. [https://books.google.hu/books/about/Annuities\\_on\\_Lives.html?id=id5bAAAAQAAJ&redir\\_esc=y](https://books.google.hu/books/about/Annuities_on_Lives.html?id=id5bAAAAQAAJ&redir_esc=y), letöltés dátuma: 2016.08.19.

Deák, I. (1990). *Random Number Generators and Simulation*, volume 4 of *Mathematical methods of operations research*. Akadémiai Kiadó, Budapest. ISBN 963-05-5316-3.

Deaton, A. & Paxson, C. (2001). Mortality, Income, and Income Inequality Over Time in Britain and the United States. *NBER Working Paper No. 8534, Cambridge*. <http://dx.doi.org/10.3386/w8534>.

Dekkers, G. (2010). The long-term adequacy of the Belgian public pension system: An analysis based on the MIDAS model. *Working Paper 10-10 of the Federal Planning Bureau, Brüsszel*. <http://www.plan.be/admin/uploaded/201005110837500.wp201010.pdf>, letöltés dátuma: 2016.08.19.

Dekkers, G. & Belloni, M. (2009). Micro simulation, pension adequacy and the dynamic model MIDAS: an introduction. *Project AIM-Deliverable Working Paper*. [http://www.ief.es/documentos/investigacion/seminarios/economia\\_publica/2009\\_21Enero.pdf](http://www.ief.es/documentos/investigacion/seminarios/economia_publica/2009_21Enero.pdf), letöltés dátuma: 2016.08.19.

Di Cesare, M. & Murphy, M. (2009). Forecasting Mortality, Different Approaches for Different Cause of Deaths? The Cases of Lung

- Cancer; Influenza, Pneumonia, and Bronchitis; and Motor Vehicle Accidents. *British Actuarial Journal*, 15(Supplement):185–211. <http://dx.doi.org/10.1017/s1357321700005560>.
- Dimitrova, D.S., Haberman, S. & Kaishev, V.K. (2013). Dependent competing risks: cause elimination and its impact on survival. *Insurance: Mathematics and Economics*, 53(2):464–477. <http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2013.07.008>.
- Dowd, K., Blake, D., Cairns, A.J.G. & Dawson, P. (2006). Survivor Swaps. *Journal of Risk and Insurance*, 73:1–17. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1539-6975.2006.00163.x>.
- Efron, B. (1979). Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *The Annals of Statistics*, 7(1):1–26. <http://dx.doi.org/10.1214/aos/1176344552>.
- EIOPA (2012). *Revised technical specifications for the Solvency II valuation and Solvency Capital Requirements calculations*. European Insurance and Occupational Pensions Authority, Frankfurt. [https://eiopa.europa.eu/Publications/QIS/A\\_-\\_Revised\\_Technical\\_Specifications\\_for\\_the\\_Solvency\\_II\\_valuation\\_and\\_Solvency\\_Capital\\_Requirements\\_calculations\\_\\_Par.pdf](https://eiopa.europa.eu/Publications/QIS/A_-_Revised_Technical_Specifications_for_the_Solvency_II_valuation_and_Solvency_Capital_Requirements_calculations__Par.pdf), letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Espenshade, T.J., Guzman, J.C. & Westoff, C.F. (2003). The surprising global variation in replacement fertility. *Population Research and Policy Review*, 22(5):575–583. <http://dx.doi.org/10.1023/b:popu.0000020882.29684.8e>.
- EU (2004). *Council Directive 2004/113/EC of 13 December 2004*

*implementing the principle of equal treatment between men and women in the access to and supply of goods and services.*

<http://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=>

CELEX:32004L0113&from=EN, letöltés dátuma: 2016.08.19.

EU (2009). *Directive 2009/138/EC of the European Parliament and of the Council of 25 November 2009 on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance.*

<http://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=>

CELEX:32009L0138&from=EN, letöltés dátuma: 2016.08.19.

Fáy, A. (1854). *Adatok Magyarország bővebb ismertetésére.* Beimel és Kozma, Pest.

Forfar, D.O. & Smith, D. (1985). The changing shape of English life tables. *Transactions of the Faculty of Actuaries*, 40:98–134. <http://dx.doi.org/10.1017/s0071368600009137>.

Gassmann, H., Deák, I. & Szántai, T. (2002). Computing multivariate normal probabilities: a new look. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 11(4):920–949. <http://dx.doi.org/10.1198/106186002385>.

Gavrilov, L.A. & Gavrilova, N. (2011). Mortality Measurement at Advanced Ages: A Study of the Social Security Administration Death Master File. *North American Actuarial Journal*, 115:432–447. <http://dx.doi.org/10.1080/10920277.2011.10597629>.

Giroi, F. & King, G. (2007). Understanding the Lee–Carter Mortality Forecasting Method. *Harvard University working paper*. <http://gking.harvard.edu/files/lc.pdf>, letöltés dátuma: 2016.08.19.

- Gompertz, B. (1825). On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London (Series A)*, 115:513–585. <http://dx.doi.org/10.1098/rstl.1825.0026>.
- Gray, R. & Kovács, E. (2001). Az általánosított lineáris modell és biztosítási alkalmazásai. *Statisztikai Szemle*, 8:689–702. [http://www.ksh.hu/statszemle\\_archive/2001/2001\\_08/2001\\_08\\_689.pdf](http://www.ksh.hu/statszemle_archive/2001/2001_08/2001_08_689.pdf), letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Haberman, S. & Renshaw, A. (2011). A comparative study of parametric mortality projection models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 48(1):35–55. <http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2010.09.003>.
- Hablicsek, L. & Kovács, K. (2007). *Az életkilátások differenciálódása iskolázottság szerint, 1986–2005*. KSH Népeségtudományi Kutatóintézet, Budapest. <http://www.demografia.hu/kiadvanyokonline/index.php/kutatasijelentesek/article/view/384/138>, letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Hablicsekné Richter, M. & Hollósné Marosi, J. (2008). A nyugdíjban, nyugdíjszerű ellátásban részesülők halandósága 2004-ben. *Statisztikai Szemle*, 86(9):875–898. [http://www.ksh.hu/statszemle\\_archive/2008/2008\\_09/2008\\_09\\_875.pdf](http://www.ksh.hu/statszemle_archive/2008/2008_09/2008_09_875.pdf), letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Halley, E. (1693). An estimate of the degrees of the mortality of mankind, drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslaw; with an attempt to ascertain the price of annuities upon

- lives. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 17:596–610. <http://dx.doi.org/10.1098/rstl.1693.0007>.
- Hanewald, K. (2009). Mortality modeling: Lee–Carter and the macroeconomy. *SFB 649 Discussion Paper 2009-008*. <http://edoc.hu-berlin.de/series/sfb-649-papers/2009-8/PDF/8.pdf>, letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Hári, N., De Waegenare, A., Melenberg, B. & Nijman, T.E. (2008). Longevity Risk in Portfolios of Pension Annuities. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42(2):505–519. <http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2007.01.012>.
- Harville, D. (1997). *Matrix Algebra From a Statistician's Perspective*. Springer–Verlag, New York, Inc. ISBN 978-0387949789.
- Heligman, L. & Pollard, J. (1980). The age pattern of mortality. *Journal of the Institute of Actuaries*, 107(1):49–80. <http://dx.doi.org/10.1017/s0020268100040257>.
- Hobcraft, J., Menken, J. & Preston, S. (1982). Age, Period, and Cohort Effects in Demography: A Review. *Population Index*, 48(1):4–43. <http://dx.doi.org/10.2307/2736356>.
- Holtzer, P. (szerk.) (2010). *Jelentés a Nyugdíj és Időskor Kerekasztal tevékenységéről*. Miniszterelnöki Hivatal, Budapest. ISBN 9789639682047.
- Hunt, A. & Villegas, A. (2015). Robustness and convergence in the Lee–Carter model with cohort effects. *Insurance: Mathematics and Economics*, 64:186–202. <http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2015.05.004>.

- Hunt, A. & Blake, D. (2014). A general procedure for constructing mortality models. *North American Actuarial Journal*, 18(1):116–138. <http://dx.doi.org/10.1080/10920277.2013.852963>.
- Hyndman, R.J. & Ullah, M. (2007). Robust forecasting of mortality and fertility rates: a functional data approach. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(10):4942–4956. <http://dx.doi.org/10.1016/j.csda.2006.07.028>.
- IMF (2012). *Global Financial Stability Report. Chapter 4: The financial impact of longevity risk*. International Monetary Fund, Washington D.C. <http://www.imf.org/external/pubs/ft/gfsr/2012/01/pdf/text.pdf>, letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Ispány, M., Michaletzky, Gy., Reiczigel, J., Tusnády, G., Tusnady, P. & Varga, K. (2010). Approximation of non-negative integer-valued matrices with application to Hungarian mortality data. *Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, 5–9 July, 2010, Budapest, Hungary*. <http://www.renyi.hu/~tusnady/gtpapers/gt169.pdf>, letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Keilman, N. (1998). How Accurate Are the United Nations World Population Projections? *Population and Development Review*, 24(supplement):15–41. <http://dx.doi.org/10.2307/2808049>.
- Keilman, N. (2008). European Demographic Forecasts Have Not Become More Accurate Over the Past 25 Years. *Population and Development Review*, 34(1):137–153. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1728-4457.2008.00209.x>.

- Koissi, M., Shapiro, A. & Hognas, G. (2006). Evaluating and extending the Lee–Carter model for mortality forecasting: Bootstrap confidence interval. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38(1):1–20. <http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2005.06.008>.
- Kovács, E. (2011). *Pénzügyi adatok statisztikai elemzése (IV. bővített kiadás)*. Tanszék Kft., Budapest. ISBN 978-963-88777-2-7.
- Kovács, K. (2012). *Az ok-specifikus halálozás trendjei*. KSH Népeségtudományi Kutatóintézet, Budapest. <http://demografia.hu/kiadvanyokonline/index.php/demografiaiportre/article/view/652/220>, letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Kovács, E. & Szüle B. (2005). *Pension Schemes and Mortality Reduction in Hungary*. The Impact of European Integration on the National Economy, 2005. október 27–30., Kolozsvár.
- Kovács, E. & Szüle B. (2006). *Early retired pensioners and longevity: factors affecting pension schemes in Hungary*. 6th European Conference on Health Economics, 2006. július 6–9., Budapest.
- Kovács, E., Rétallér, O. & Vékás, P. (2015). Modellpontok szerepe a nyugdíj-hatásvizsgálatban. *Közgazdasági Szemle*, 62(12):1328–1342. <http://dx.doi.org/10.18414/kszo.2015.12.1328>.
- Kovács, E. (szerk.) (2012). *Nyugdíj és gyermekvállalás tanulmánykötet – 2012*. Társadalombiztosítási könyvtár. Gondolat Kiadó, Budapest. ISBN 9789636934583.
- Krutov, A. (2006). Insurance-Linked Securities: An Emerging Class of Financial Instruments. *Financial Engineering News*, 48:7–16.



- Lee, R. D. & Carter, L. R. (1992). Modeling and forecasting U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87:659–671. <http://dx.doi.org/10.2307/2290201>.
- Lee, R. (2000). The Lee–Carter Method for Forecasting Mortality, with Various Extensions and Applications. *North American Actuarial Journal*, 4(1):80–93. <http://dx.doi.org/10.1080/10920277.2000.10595882>.
- Lee, R. & Miller, T. (2001). Evaluating the performance of the Lee–Carter method for forecasting mortality. *Demography*, 38(4):537–549. <http://dx.doi.org/10.1353/dem.2001.0036>.
- Li, J. & O’Donoghue, C. (2013). A survey of dynamic microsimulation models: uses, model structure and methodology. *International Journal of Microsimulation*, 6(2):3–55. [http://www.microsimulation.org/IJM/V6\\_2/2\\_IJM\\_6\\_2\\_2013\\_Li\\_Odonoghue.pdf](http://www.microsimulation.org/IJM/V6_2/2_IJM_6_2_2013_Li_Odonoghue.pdf), letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Li, N. & Lee, R. (2005). Coherent mortality forecasts for a group of populations: An extension of the Lee–Carter method. *Demography*, 42(3):575–594. <http://dx.doi.org/10.1353/dem.2005.0021>.
- Lovász, E. (2011). Analysis of Finnish and Swedish mortality data with stochastic mortality models. *European Actuarial Journal*, 1(2):259–289. <http://dx.doi.org/10.1007/s13385-011-0039-8>.
- Májér, I. & Kovács, E. (2011). Élettartam-kockázat – a nyugdíjrendszerre nehezedő egyik teher. *Statisztikai Szemle*, 7–8:790–812. [http://www.ksh.hu/statszemle\\_archive/2011/2011\\_07-08/2011\\_07-08\\_790.pdf](http://www.ksh.hu/statszemle_archive/2011/2011_07-08/2011_07-08_790.pdf), letöltés dátuma: 2016.08.19.

- Májer, I.M., Nusselder, W.J., Mackenbach, J. P, Klijs, B. & van Baal, P.H.M. (2011). Mortality Risk Associated With Disability: A Population-Based Record Linkage Study. *American Journal of Public Health*, 101(12):e9–15. <http://dx.doi.org/10.2105/ajph.2011.300361>.
- Májer, I.M., Stevens, R., Nusselder, W.J., Mackenbach, J. P & van Baal, P.H.M. (2013). Modeling and Forecasting Health Expectancy: Theoretical Framework and Application. *Demography*, 50(2):673–97. <http://dx.doi.org/10.1007/s13524-012-0156-2>.
- Major, K. & Varga, G. (2013). Parametrikus nyugdíjreformok és életciklus munkakínálat. *Közgazdasági Szemle*, 60(11):1169–1207. [http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/1377/1/Kszemle\\_CIKK\\_1431.pdf](http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/1377/1/Kszemle_CIKK_1431.pdf), letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Makeham, W. (1867). On the law of mortality. *Journal of the Institute of Actuaries*, 13(6):325–358. <http://www.jstor.org/stable/41134517>, letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Markovsky, I. (2012). *Low-Rank Approximation: Algorithms, Implementation, Applications*. Springer–Verlag, New York, Inc. ISBN 978-1-4471-2227-2.
- McCullagh, P. & Nelder, J. (1989). *Generalized Linear Models (2nd edition)*. Chapman & Hall, London. ISBN 978-0412317606.
- MNB (2015). 54/2015. (XII. 21.) MNB rendelet a technikai kamatláb maximális mértékéről. [http://net.jogtar.hu/jr/gen/hjegy\\_doc.cgi?docid=A1500054.MNB](http://net.jogtar.hu/jr/gen/hjegy_doc.cgi?docid=A1500054.MNB), letöltés dátuma: 2016.08.19.

- Molnár D., L. & Hollósné Marosi, J. (2015). Az öregségi nyugdíjasok halandósága. A nyugellátási összeg, a nyugdíjazási életkor és a halandóság összefüggései Magyarországon, 2004–2012. *Közgazdasági Szemle*, 62(12):1258–1290. <http://dx.doi.org/10.18414/ksz.2015.12.1258>.
- Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*. Springer–Verlag, New York, Inc. ISBN 978-0-387-28659-4.
- ONYF (2015). MIDAS-HU Microsimulation Pension Model Manual. [http://mikroszimulacio.onyf.hu/attachments/article/35/Midas\\_HU%20manual\\_final\\_ENG.pdf](http://mikroszimulacio.onyf.hu/attachments/article/35/Midas_HU%20manual_final_ENG.pdf), letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Orbán, G. & Palotai, D. (2006). Gazdaságpolitikai és demográfiai kihívások a magyar nyugdíjrendszerben. *Közgazdasági Szemle*, 53(7–8):583–603. <http://epa.oszk.hu/00000/00017/00128/pdf/02orban-palotai.pdf>, letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Országgyűlés (2014). 2014. évi C. törvény Magyarország 2015. évi központi költségvetéséről. <http://kozlonyok.hu/nkonline/MKPDF/hiteles/MK14184.pdf>, letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Országgyűlés (2015). 2015. évi CCXV. törvény a pénzügyi közvetítőrendszer egyes szereplőit érintő törvények jogharmonizációs célú módosításáról. <http://mkogy.jogtar.hu/?page=show&docid=A1500215.TV>, letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Pallós, E. (1971). *Magyarország halandósági táblái 1900/01-től 1967/68-ig*. KSH Népeségtudományi Kutatóintézet, Budapest. <http://demografia.hu/kiadvanyokonline/index.php/kozlemenyek/issue/view/444>, letöltés dátuma: 2016.08.19.

- Panjer, H. (2006). *Operational Risk: Modeling Analytics*. John Wiley & Sons, New York. ISBN 978-0-471-76089-4.
- Perks, W. (1932). On some experiments in the graduation of mortality statistics. *Journal of the Institute of Actuaries*, 63(1):12–40. <http://www.jstor.org/stable/41137425>, letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Plat, R. (2009). On stochastic mortality modeling. *Insurance: Mathematics and Economics*, 45(3):393–404. <http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2009.08.006>.
- R Development Core Team (2008). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0.
- Radnóti, L. (2003). Az élettartamok statisztikája. *Statisztikai Szemle*, 81(7):559–570. [http://www.ksh.hu/statszemle\\_archive/2003/2003\\_07/2003\\_07\\_559.pdf](http://www.ksh.hu/statszemle_archive/2003/2003_07/2003_07_559.pdf), letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Renshaw, A. & Haberman, S. (2006). A cohort-based extension to the Lee–Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38(3):556–570. <http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2005.12.001>.
- Richards, S. & Currie, I. (2009). Longevity Risk and Annuity Pricing with the Lee–Carter Model. *British Actuarial Journal*, 15(2):317–343. <http://dx.doi.org/10.1017/s1357321700005675>.
- Simonovits, A. (2003). *Modeling Pension Systems*. Palgrave Macmillan, London. ISBN 978-1-4039-1524-5.

- Simonovits, A. (2009). Népeségöregedés, tb-nyugdíj és megtakarítás – parametrikus nyugdíjreformok. *Közgazdasági Szemle*, 46(4):297–321. <http://epa.oszk.hu/00000/00017/00158/pdf/01simonovits.pdf>, letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Simonovits, A. (2014). Gyermektámogatás, nyugdíj és endogén/heterogén termékenység – egy modell. *Közgazdasági Szemle*, 61(6):672–692. [http://real.mtak.hu/13507/1/Kszemle\\_CIKK\\_1486.pdf](http://real.mtak.hu/13507/1/Kszemle_CIKK_1486.pdf), letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Szepesváry, L. (2015). Dinamikus modellek alkalmazása életbiztosítások cash-flow előrejelzésére. In *Keresztes, G. (szerk.): Tavaszi Szél 2015 konferenciakötet (pp. 581-600.)*. Doktoranduszok Országos Szövetsége, Budapest. ISBN 978-615-5250-03-3.
- Tuljapurkar, S., Li, N. & Boe, C. (2000). A Universal Pattern of Mortality Change in the G7 Countries. *Nature*, 405(6788):789–792. [https://www.researchgate.net/publication/12453012\\_A\\_Universal\\_Pattern\\_of\\_Mortality\\_Change\\_in\\_the\\_G7\\_Countries](https://www.researchgate.net/publication/12453012_A_Universal_Pattern_of_Mortality_Change_in_the_G7_Countries), letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Varga, G. (2014). Demográfiai átmenet, gazdasági növekedés és a nyugdíjrendszer fenntarthatósága. *Közgazdasági Szemle*, 61(11):1279–1318. <http://real.mtak.hu/18270/>, letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Vékás, P. (2009). Harry H. Panjer: Operational Risk: Modeling Analytics. *Közgazdasági Szemle*, 56(4):387–389. [http://epa.oszk.hu/00000/00017/00158/pdf/07konyvism\\_panjer.pdf](http://epa.oszk.hu/00000/00017/00158/pdf/07konyvism_panjer.pdf), letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Vékás, P. (2011). Túlélési modellek. In *Kovács, E. (2011): Pénzügyi*

- adatok statisztikai elemzése (IV. bővített kiadás, 9. fejezet, pp. 173–194.).* Tanszék Kft., Budapest. ISBN 978-963-88777-2-7.
- Vékás, P. (2012). Összefüggő biztosítási kockázatok modellezése. *Corvinus Kutatások*, 2093. <http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/2093/>, letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Vékás, P. (2015). Az egyéni munkaerő-piaci aktivitás becslése mikroszimulációs modellkeretben. *Közgazdasági Szemle*, 62(12):1291–1308. <http://dx.doi.org/10.18414/ksz.2015.12.1291>.
- Vékás, P. (2016). Nyugdíjcélú életjáradékok élettartam-kockázata az általánosított korcsoport-időszak-kohorsz modellkeretben (elbírálás alatt a Statisztikai Szemlénél). *Corvinus Kutatások*, 2399. <http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/2399/>, letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Villegas, A. M., Kaishev, V. & Millossovich, P. (2016). *StMoMo: An R Package for Stochastic Mortality Modelling*. <https://cran.r-project.org/web/packages/StMoMo/vignettes/StMoMoVignette.pdf>, letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Wang, J. Z. (2007). Fitting and Forecasting Mortality for Sweden: Applying the Lee–Carter Model. *Working Paper, Stockholm University, Stockholm*. <http://www2.math.su.se/matstat/reports/serieb/2007/rep1/report.pdf>, letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Weibull, W. (1951). A Statistical Distribution Function of Wide Applicability. *Journal of Applied Mechanics*, 18:293–297. [http://www.barringer1.com/wa\\_files/Weibull-ASME-Paper-1951.pdf](http://www.barringer1.com/wa_files/Weibull-ASME-Paper-1951.pdf), letöltés dátuma: 2016.08.19.

- Wilmoth, J. (1993). Computational Methods for Fitting and Extrapolating the Lee–Carter Model of Mortality Change. *Technical report. Department of Demography, University of California, Berkeley, California*. <http://demog.berkeley.edu/~jrw/Papers/LCtech.pdf>, letöltés dátuma: 2016.08.19.
- Wilmoth, J. (1995). Are mortality projections always more pessimistic when disaggregated by cause of death? *Mathematical Population Studies*, 5(4):293–319. <http://dx.doi.org/10.1080/08898489509525409>.
- Wiśniowski, A. , Smith, P.W.F., Bijak, J., Raymer, J. & Forster, J.J. (2015). Bayesian Population Forecasting: Extending the Lee–Carter Method. *Demography*, 52(3):1035–1059. <http://dx.doi.org/10.1007/s13524-015-0389-y>.
- Wong-Fupuy, C. & Haberman, S. (2004). Projecting Mortality Trends: Recent Developments in the U.S. and U.K. *North American Actuarial Journal*, 8(2):56–83. <http://dx.doi.org/10.1080/10920277.2004.10596137>.

# Az élettartam-kockázat modellezése

Az emberi élettartam átlagos hossza – mind Magyarországon, mind a fejlett országokban általában – az elmúlt évszázad során rendkívül gyorsan növekedett, melynek háttérében elsősorban az orvostudomány fejlődése és az étel-miszer-ellátás javulása állnak.

Ez a jelenség egyrészt kétségtelenül nagyon pozitívan befolyásolja életkilátásainkat, másrészt ugyanakkor jelentős terhet ró a folyó finanszírozású állami nyugdíjrendszerekre, a nyugdíjpénztárakra és a járadéktermékeket értékesítő életbiztosítókra. Ezeket a negatív pénzügyi következményeket a szakirodalom élettartam-kockázatnak nevezi.

E könyv elméleti része a halandósági modellezés, előrejelzés és az élettartam-kockázat gazdag nemzetközi és hazai szakirodalmi háttérének ismertetése után bemutatja a legnépszerűbb és legújabb modellezési megközelítéseket, és végül a korábban tált ismereteket két gyakorlati esettanulmányon: az állami nyugdíjrendszer, illetve a nyugdíjpénztárak és életbiztosítók példáján illusztrálja.

A szerző célja, hogy könyvét az aktuáriusképzésben részt vevő hallgatók, az érdeklődő tudományos kutatók és társadalombiztosítási szakemberek, valamint gyakorló aktuáriusok egyaránt eredményesen használhassák fel az olyan modellek készítése során, amelyekben fontos az élettartam-kockázat figyelembe vétele.